الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

المدرسة العليا للاقتصاد وهران

ORAN GRADUATE SCHOOL OF ECONOMICS

Polycopié pédagogique

Présenté par : Noureddine BOUTERAA

Intitulé du Polycopié

Résumé de cours et exercices résolus

Destiné aux étudiants de la 2ème Année

Classes préparatoires / Premier cycle

Table des matières

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon professeur et mon encadreure Monsieur Belaicha Slimane, pour ses conseils et ses encouragements pour préparer ce polycopié.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont donné une partie de leur savoir au niveau du l'Ecole Supérieure d'Economie d'Oran et en particulier mes collègues qui m'ont toujours aidé scientiquement.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes êtres les plus chers au monde

A ma Mère.

A mon Père qui a tant sacrifié pour mes études.

A mes Frères et mes Sœurs.

A tous mes amis et mes collègues.

En fin, je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Avant-Propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de la deuxiième année d'Ecole Supérieure d'Economie.

Ce polycopié traite une partie importante d'Analyse Mathématique et conforme aux programme officiel d'Analyse Mathématique pour les Ecoles Supériure d'Economie.

Ce programme sera couvert par les quatre chapitres, chaque chapitre en sous-chapitres, chaque sous-chapitre en paragraphes, numérotés dans l'ordre de cette division, de façon que lecteur puisse retrouver rapidement une partie citée dans l'exposé.

Les exercices y sont classés par chapitres correspondant au programme officiel. A l'intérieur de chaque chapitre, chacune des subdivisions est précédée d'un rappel de l'essentiel du cours.

Ce cours a été rédigé de façon que l'essentiel soit dit pour chaque notion introduite. afin d'aider l'étudiant à positionner l'acquisition de ses connaissances (consepts et résultats) dans une « grande ligne », ils donnent les théorèmes et résultats essentiels sans démonstrations.

Ce cours contient beaucoup d'exemples illustrant les définitions et aidant la compréhension des conditions d'applications des théorèmes et des propositions.

La rédaction des solutions a été faite avec le plus grand soin, le souci principal etant de familiariser l'étudiant avec le raisonement mathématique et de lui apprendre surtout à rédiger.

Nous éspérons que ce polycopié aidera les étudiants à asimiler plus rapidement les notions et les méthodes introduit au cours.

Nos plus grands remerciements s'adresser à tout ceux et celles qui ont contribué à la formation des étudiants de l'Ecole Supérieure d'Economie.

Enfin, c'est avec reconnaissance que nous accueillerons les critiques et les suggestions que voudront bien nous faire parvenir les utilisateurs de ce polycopié.

Notation

Dans ce polycopié, les notations suivantes sont utilisées.

Symboles logiques et mathématiques :
$\in$ appartenance,$x \in A$ *i.e.*, x appartient à A.
$\subset$ inclusion,
$\leq$, $\geq$ inégalités larges, $x \leq y$, se lit x est inférieur ou égal à y. $x \geq y$ se lit x est supérieur ou égal à y.
$<$, $>$ inégalités strictes, $x < y$ se lit x est strictement inférieur à y. $x > y$ se lit x est strictement supérieur à y.
$\Rightarrow$ implication, $p \Rightarrow q$ se lit p implique q.
$\Longleftrightarrow$ équivalence, $p \Longleftrightarrow q$ se lit p est équivalente à q. (Condition nécessaire et suffisante).
$f \underset{x_0}{=} o\left(g\right)$, se lit f est négligeable à g et o se lit "petit o".
$f \underset{x_0}{=} O\left(g\right)$, se lit f est négligeable à g et O se lit "grand O".
$f \underset{x_0}{\sim} g$, se lit f est équivalente à g.
$\|\cdot\|$ norme.
$D \setminus \{A\}$ se lit D privé de A.
∞ infini.

Alphabet grec :
α alpha.
β bêta.
γ gamma.
δ, $\triangle$ delta.
ϵ epsilon.
λ lambda.
θ têta.

Chapitre 1

Fonction de plusieurs variables

1.1 Fonction de plusieurs variables

Définition 1. Une fonction f définie sur une partie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ un réel unique $f(X)$.

Remarque 1. (i) L'ensemble des points $S = \{(X, f(X)) \mid X \in D\}$ est la surface représentative de f, c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

(ii) X se note aussi $\overrightarrow{X}$. Si $n = 2$, on utilise aussi la notation (x, y) et si $n = 3$, on utilise la notation (x, y, z).

(iii) Lorsque $n = 2$ le graphe C_f est tridimensionnel. Les axes relatifs aux variables, x et y, sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine D apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $A = (a, b)$, dont l'image est $f(A) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(a, b, f(A)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions. Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation. Pour $n > 2$, la représentation plane devient malheureusement impraticable.

1.2 Fonctions partielles

Définition 2. Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A = (a, b)$ un point intérieur de D. Les fonctions

$$x \mapsto f(x, b) \ \ et\ y \mapsto f(a, y),$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b, sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

1.3 Lignes de niveau

Soit $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\}$ est la courbe de niveau k de la fonction f. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace. La courbe de niveau k est la projection sur le plan xoy de l'intersection du graphe avec le plan horizontal $z = k$.

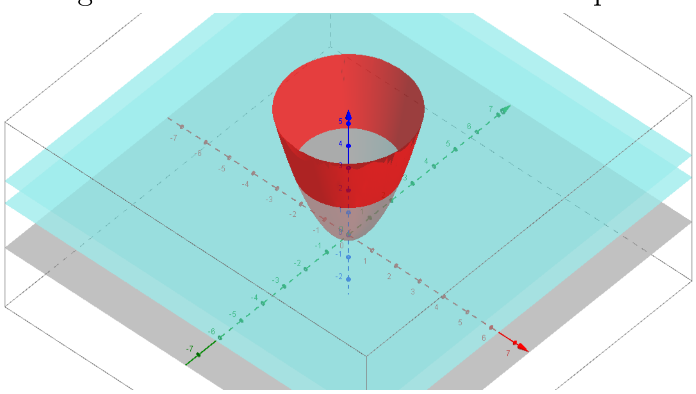
Relation entre le graphe d'une fonction et ses courbes de niveau : Géométriquement, la ligne de niveau est la projection sur le plan (x, y) de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan d'équation $z = k$.
Par exemple, si f représente la hauteur d'un point de la surface terrestre, ses courbes de niveau sont celles apparaissant sur les cartes topographiques.

Exemple 1. 1) Pour la paraboloide d'équation $z = x^2 + y^2$. La ligne de niveau $k > 0$ est le cercle (C_k) d'équation $x^2 + y^2 = k$ centré à l'origine et de rayon $\sqrt{k}$.

Pour visualiser la surfase à partir de ses lignes de niveau, il suffit de placer chaque cercle (C_k) dans le plan horizontal d'équation $z = k$.
2) Pour la surface d'équation $z = xy$. La ligne de niveau k a pour d'équation $xy = k$.

-La ligne de niveau $k = 0$ est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ } ou \text{ } y = 0\}$ c'est-à-dire la réunion des axes (ox) et (oy).

-La ligne de niveau $k = 1$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. ect...



1.4 Limites et continuité

1.4.1 Limite en un point

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A \in D$ et f une fonction définie sur D, éventuellement non définie en A, à valeurs réelles.

Définition 3. On dit que f a pour limite l au point A, ce que l'on écrit $\lim\limits_{x \to A} f(x) = l$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0 \mid X \in D \setminus \{A\} \text{ } et \text{ } \|X - A\| < r \Longrightarrow |f(X) - l| < \epsilon.$$

On dit que f tend vers $-\infty$ quand X tend vers A, ce que l'on écrit $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$, si pour tout $M < 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$X \in D \setminus \{A\} \text{ } et \text{ } \|X - A\| < r \Longrightarrow f(X) < M.$$

Proposition 1. *L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. Lorsqu'elle existe, la limite est unique.*

Astuce : Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en A, il suffit donc d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par A qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes. Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.

Remarque 2.

(1) Si la restriction à toute droite passant par A admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe!.
(2) La limite de $f(x,y)$ existe quand $(x,y) \to (0,0)$, si elle ne dépend pas du chemain suivi pour aller de (x,y) à $(0,0)$.
(3) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ (l fini (existe)), alors $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right]$.
(4) En pratique, lorsque $n=2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour du point (a,b) vers lequel il est appelé à tendre :

$$\begin{cases} x = a + r\cos(\theta), \\ y = b + r\sin(\theta). \end{cases}$$

Dans cette écriture, r représente la distance entre (a,b) et (x,y) de sorte que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)).$$

(5) Avec le changement de variable $y = tx$, où t un paramètre. On a
(i) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x,tx) = l$ existe, on ne peut rien conclure,
(ii) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x,tx)$ dépent de t, alors elle n'existe pas,
et par coséquent celle de $f(x,y)$ l'orsque $(x,y)\to(0,0)$ n'existe pas non plus.

Exemple 2. Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ avec $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Première méthode. Les chemains suivi : La première résulte directement de la définition. En effet, le long de l'axe horizontal qui a équation $y=0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,$$

tandis que, le long de l'axe vertical qui a équation $x=0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Puisque les deux limites sont différentes, alors la limites n'existe pas (de sorte que les deux limites ne coïncident pas).

Deuxième méthode. La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\
&= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \frac{r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\
&= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} (\cos(2\theta)).
\end{aligned}$$

Le résultat varie selon la direction θ, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Troisième méthode : On utilise le changement de variable $y = tx$ où t un paramètre.

Supposons que la limite existe, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-t^2)}{x^2(1+t^2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

elle dépent de t. Donc la limite n'existe pas.

Quatrième méthode : On utilise le critère à l'aide des suites. On laisse le lecteure le soin de traiter (On peut consulter [5] page 24).

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Pour trouver la valeur de la limite, si elle existe, il suffit de calculer la limite d'une restriction à une courbe continue passant par $(0,0)$:

Comme $f(0,t) = 0$ pour tout t , si la limite existe elle est 0. Pour vérifier que c'est bien la limite on passe en coordonnées polaires : on pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \end{cases} \quad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\
&= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \frac{r^2(\cos(\theta)\sin(\theta))}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} \\
&= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} (r\cos(\theta)\sin(\theta)) \\
&= \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \left(\frac{r}{2}\sin(2\theta)\right) = 0.
\end{aligned}$$

La fonction f peut donc être prolongée par continuité en $(0,0)$ par la valeur 0.

Exemple 4. On va calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

On va appliquer la méthode du chemains suivis : Suivant le chemain $y = x$ qui passe par $(0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tandis que, suivant le chemain déquation $y = x^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Donc, comme les deux limites sont différentes, alors la limites n'existe pas (de sorte que les deux limites ne coïncident pas).

Remarque 3. D'une manière similaire on peut appliquer les autres méthodes.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^4 - 2x^2y + 3y^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

Solution : 1) L'ensemble de définition de f est

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 2x^2y + 3y^2 \neq 0\right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2y + 3y^2 \neq 0 &\Longleftrightarrow \left(x^2 - y\right)^2 - 2y^2 \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

2) On va calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4 - 2x^2y + 3y^2}.$$

Les chemains suivis : Suivant le chemain $y = x$ qui passe par $(0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 - 2x + 3} = 0.$$

Tandis que, suivant le chemain déquation $y = x^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Donc la limite n'existe pas.

Exercice 2. Etudier l'existence des limites en $(0,0)$ pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}$.
2) $g(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.
3) $h(x,y) = \frac{|x|-|y|}{x^2+y^2}$.

Solution : 1) $f(x,y) = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}$. On remarque que $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ n'existe pas. Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

2) Il y a plusieurs méthodes pour trouver la limite de la fonction g.

Première méthode. La première résulte directement de la définition. En effet, le long de l'axe horizontal qui a équation $y=0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = 0.$$

De même, le long de l'axe vertical qui a équation $x=0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{-y^3}{y^2} = 0,$$

c-à-d si la limite existe elle égale à 0.

Deuxième méthode. La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta}\frac{r^3\left(\cos^3(\theta)-\sin^3(\theta)\right)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)} \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} r\left(\cos^3(\theta)-\sin^3(\theta)\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

3) Pour calculer la limite de la fonctionn h, on utilise les coordonnées polaires : on pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases} \quad r>0,\ \theta\in[0,2\pi],$$

On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} h(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta}\frac{r\left(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|\right)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)} \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta}\frac{1}{r}\left(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|\right) = +\infty, \end{aligned}$$

car $|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)| \neq 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$.

1.5 Continuité

Définition 4. Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $A \in D$ si f possède en A une limite égale à $f(A)$. Si f est continue en chaque élément de D, on dit que f est continue sur D.

Proposition 2. (i) *Si f est définie en A et possède une limite en ce point, cette limite est nécessairement égale à $f(A)$ et f est alors continue en A.*

(ii) *Si f a pour limite en A, la restriction de f à toute courbe continue (non seulement les droites !) passant par A admet la même limite l.*

Exemple 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Cependant, $\lim\limits_{x\to0}\left[\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to0}\left[\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right] = 0 = f(0,0)$.

1.5.1 Prolongement par continuité :

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \notin D$. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ existe (l fini), alors f admet un prolongement par continuité et la fonction prolongée $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & si \quad (x,y) \neq (a,b), \\ l, & si \quad (x,y) = (a,b). \end{cases}$$

Exemple 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$$

est prolongeable par continuité et la fonction prolongée $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \\ &= \lim_{r\to0} \frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)} \\ &= \lim_{r\to0} \frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to0} \left(\sqrt{r^2+1}+1\right) = 2. \end{aligned}$$

Opérations algébriques : Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) etc..., de fonctions continues.

1.6 Exercices corrigés

Exercice 3. Soient $f,\ g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & si \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

- Etudier la continuité de la fonction f et g en $(0,0)$.

Solution : En utilisant les coordonnées polaires, on pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\,, \\ y = r\sin(\theta)\,. \end{cases} \quad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f(r\cos(\theta)\,,\, r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \cos(\theta)\sin(\theta)\,, \end{aligned}$$

n'existe pas (elle dépend de θ). Don la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4. Déterminer $f(0,0)$ pour que la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

soit continue en $(0,0)$.

Solution : En utilisant les coordonnées polaires, on pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\,, \\ y = r\sin(\theta)\,. \end{cases} \quad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

On obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f(r\cos(\theta)\,,\, r\sin(\theta))$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{1-\cos\sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)} \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{1-\cos(r)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{2\sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{2\sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{4\left(\frac{r}{2}\right)^2} \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}{\frac{r}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = f(0,0).
\end{aligned}
$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}
$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$.

Solution (i) En $(0,0)$: En utilisant les coordonnées polaires, on pose

$$
\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases} \qquad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi],
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f\left(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta)\right) \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{r^3\left(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)} \\
&= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} r\left(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right) = 0 = f(0,0),
\end{aligned}
$$

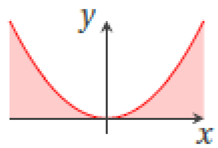
d'où, f est continue en $(0,0)$.
(ii) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De (i) et (ii), on peut donc conclure que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions données.

(1) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$, (2) $f(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$,
(3) $f(x,y) = \ln(x+y)$, (4) $f(x,y,z) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{xz}$
(5) $f(x,y) = \ln\left(4-x^2-y^2\right) + \sqrt{x^2+y^2-1}$,
(6) $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$,
(7) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

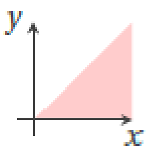
Solution : 1)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 - y \geq 0 \, et \, y > 0\right\}.$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \leq x^2 \;\; et \;\; y > 0\right\}.$$



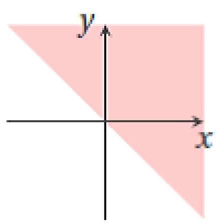
2)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x > y \;\; et \;\; y > 0\right\}.$$



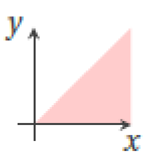
3)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \geq -x\right\}.$$



4)

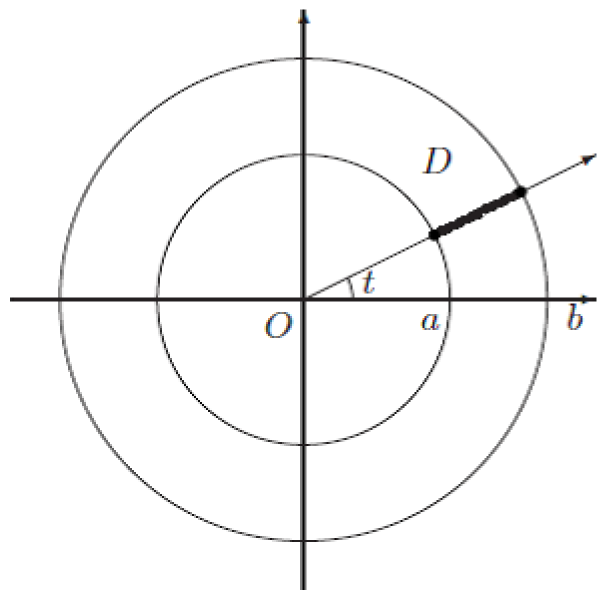
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \neq 0 \;\; et \;\; z \neq 0\right\}.$$



5)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \;\; et \;\; 4 - x^2 - y^2 > 0\right\}.$$

On dessine les deux cercles (C_1) de rayon $r = 1$ et de centre $O = (0,0)$ et (C_2) de rayon $r = 2$ et de centre $O = (0,0)$. Puis on prend l'intersection du l'interieur de (C_1) et l'exterieur de (C_2) :
Le repère est orthonormé tels que $a = 1, \; b = 2$.



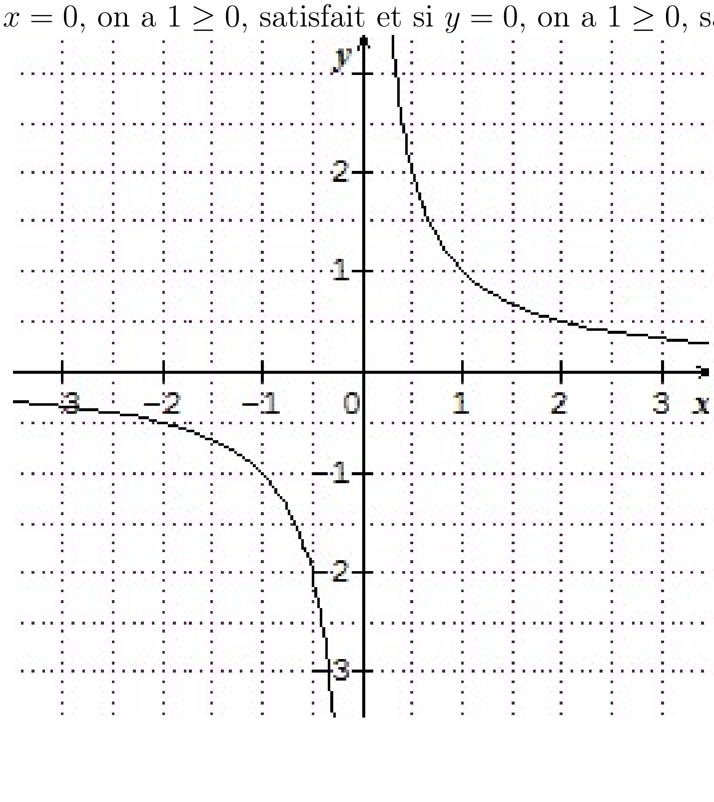
6)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 - xy \geq 0\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq \frac{1}{x},\ x \neq 0\right\}.$$

On dessine la courbe de la fonction $x \mapsto y = \frac{1}{x}$ et $x \neq 0$. On choisi un point de chaqu' une de trois zones.

(P_1) : $(2,2)$, $1 - 4 = -3 < 0$, refusé.
(P_2) : $(-1,1)$, $1 - 1 = 0 \geq 0$, satisfait.
(P_3) : $(-2,-2)$, $1 - 4 = -3 < 0$, refusé.

Si $x = 0$, on a $1 \geq 0$, satisfait et si $y = 0$, on a $1 \geq 0$, satisfait.



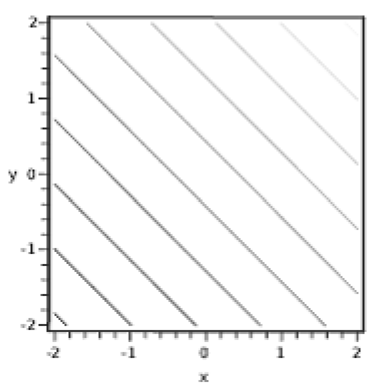
7)
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1-x^2\geq 0\ \ et\ \ 1-y^2\geq 0\right\}.$$

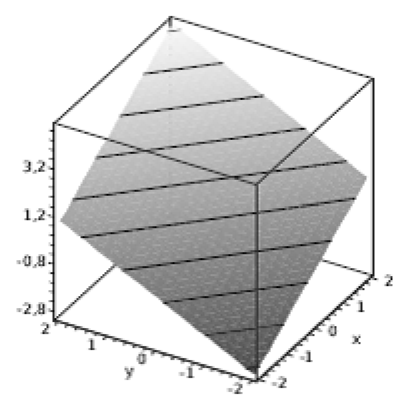
On a :
$x^2=1\Rightarrow x=1\ ou\ x=-1,$
$y^2=1\Rightarrow y=1\ ou\ y=-1,$
$x=2$, on a $1-y^2=1-4=-3<0$, refusé.
$x=-2$, on a $1-y^2=1-4=-3<0$, refusé.
$x=0,\ \ on\ a\ 1\geq 0$, satisfait.
$y=2\ ou\ y=-2$, on a $1-y^2=1-4=-3<0$, refusé
$y=0$, on a $1\geq 0$, satisfait.

Exercice 7. Dans chaque cas, déterminer les courbes de niveau des fonctions de deux variables données. Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveaux qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

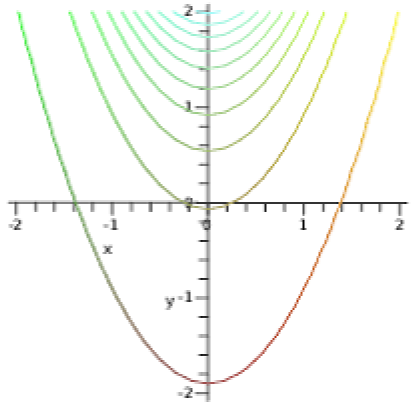
1) $f(x,y)=x+y-1$
2) $g(x,y)=e^{y-x^2}$
3) $h(x,y)=y\cos(x)$.

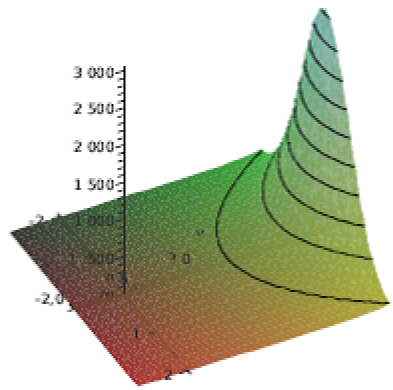
Solution : 1) La ligne de niveau k est l'ensemble d'éqution $f(x,y)=k\Longleftrightarrow y=1-x+k$.
si $k=0$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y=1-x$, ect....



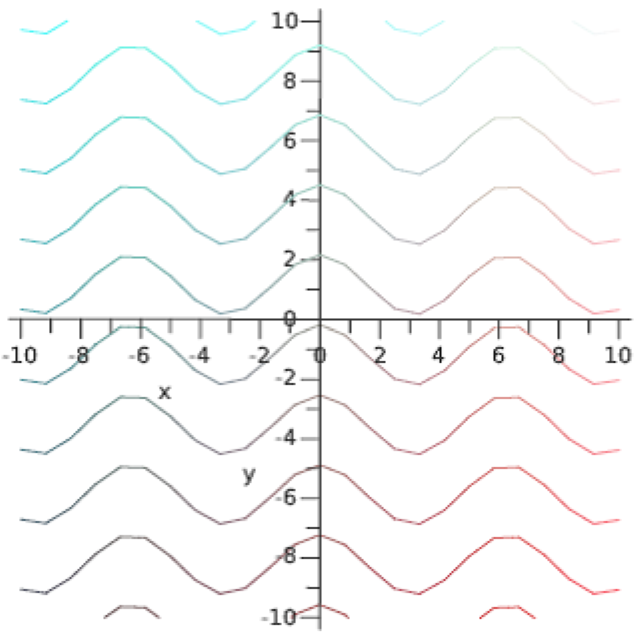


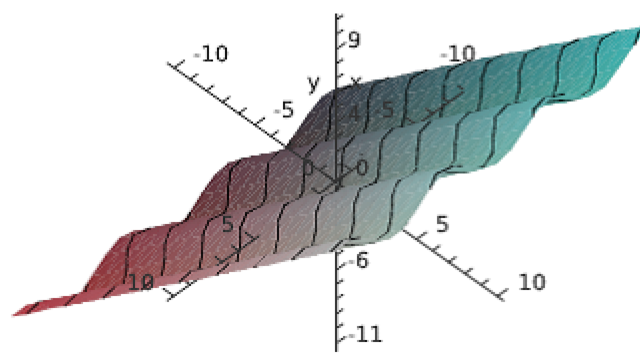
2) La ligne de niveau k est l'ensemble d'éqution $g(x,y)=k\Longleftrightarrow y=x^2+\ln(k)$.
si $k=1$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y=x^2$.
si $k=e$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y=x^2+1$.ect....





3) La ligne de niveau k est l'ensemble d'éqution $f(x,y) = k \Longleftrightarrow y = \cos(x) + k$.
si $k = 0$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y = \cos(x)$.
si $k = \frac{\pi}{2}$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y = \cos(x) + \frac{\pi}{2}$, ect....





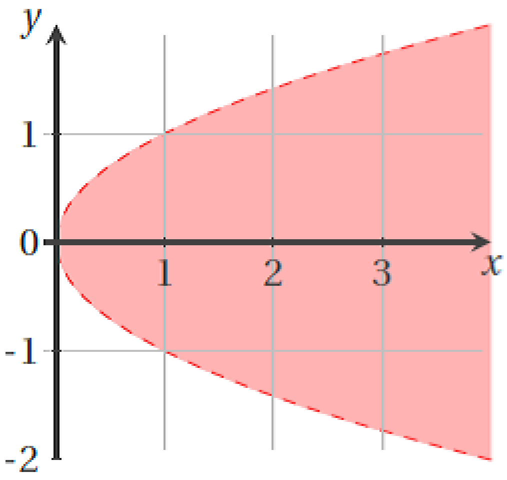
Exercice 8. 1) Déterminer et représenter l'ensemble de définition de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \ln(x - y^2)$.

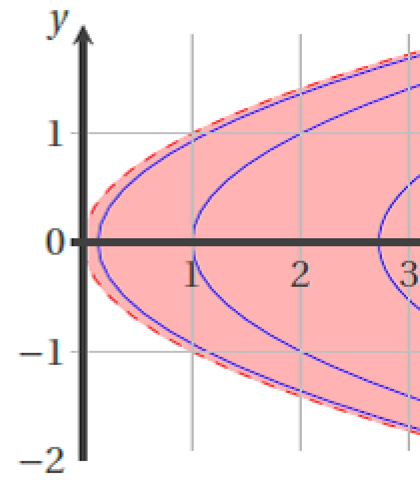
2) Déterminer et représenter ses courbes de niveaux.

Solution : 1) L'ensemble de définition de la fonction f est

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x\right\}.$$

2) La ligne de niveau k est l'ensemble d'éqution $f(x,y) = k \Longleftrightarrow x = y^2 + e^k$.
si $k = 1$, la ligne de niveau est une droite d'équation $y = y^2 + e$. ect....





Exercice 9. Ces limites existent-elles dans $\mathbb{R}$?

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$.
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$.
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Solution : 1. La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas car

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1} f(x,y)\right] = \lim_{(x,y)\to(1,1)^{\pm}} \frac{1}{x-y} = \pm\infty.$$

.

2. En utilisant les coordonnées polaires. En posant

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f(1+r\cos(\theta),\, r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{r^3\sin^3(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\cos^2(\theta))} \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \left(r\cos^3(\theta)\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

.

3. La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas. En effet
- Suivant le chemain $y = x$ qui passe par $(0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tandis que, suivant le chemain d'équation $y = 0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

1.7 Dérivabilité et différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (fonctions de deux variables)

1.7.1 Dérivées partielles premières :

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in D$.

Définition 5. 1) On appelle dérivée partielle de f par rapport à x en $M(a,b)$ notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ la limite si elle existe de

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

2) On appelle dérivée partielle de f par rapport à y en $M(a,b)$ notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ la limite si elle existe de

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

3) Si f admet les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on dit que f est dérivable.

Notation : $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi f_x et $\frac{\partial f}{\partial y}$ se note aussi f_y .

Exemple 7. On va calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
1) Soit la fonction $f(x,y) = 3x^2 + xy + 2y^2$ définie sur $D = \mathbb{R}^2$, elle est continue et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 4y$ (car x est considérée constante).
2) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors, la dérivée partielle par rapport à x et y est :
(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2}.$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0,$$

et

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\times 0}{h^2+0}-0}{h}=0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & si \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Exemple 8. Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Alors, la dérivée partielle par rapport à x et y est

(i) Sur $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2+0}-0}{h}=1,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^3}{h^2+0}-0}{h}=-1.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & si \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4+2x^2y^2+2y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ -1, & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1.8 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (a, b), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (a, b). On les note

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = f''_{x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = f''_{y^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = f''_{xy}(x, y),$$

sont les dérivées partielles secondes possibles.

Exemple 9. 1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3.$$

Les dérivées premières et secondes de la fonction f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x + 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 6x - 6y,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6y.$$

Remarque 4. Dans cet exemple, la matrice hessienne de f au point $M(x, y)$ notée $H_f(x, y)$ est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6y,$$

sont égales.

1.9 Fonction de classe C^n

Définition 6. On dit qu'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D un ouvert) est de classe C^n sur D si elle admet des dérivées partielles jusqu'a l'ordre n continues sur D.

Remarque 5. (i) Si les fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur D, on dit que f est de classe C^1 sur D et on écrit $f \in C^1(D)$.

(ii) Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe C^∞ sur D.

1.10 Théorème de Schwarz

Si les dérivées partielles (croisées ou mixtes) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ est continues en (a,b) alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

Exercice 10. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2) Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point. Que peut-on déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Solution : 1) La continuité de f :

(i) - Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: La fonction est clairement continue dans $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) - En $(0,0)$: Elle est aussi continue en $(0,0)$. En effet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

<

$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} \frac{r^4 \cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)}{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}$$
$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} r^2 \cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) = 0 = f(0,0),$$

d'où, f est continue en $(0,0)$. Donc, comme f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et en $(0,0)$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Les dérivée partielle par rapport à x et y est
(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2 x}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0,$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0)}{h} = 0, & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \lim\limits_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\begin{cases} \frac{4xy^3\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0+h,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,0)\,, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\begin{cases} \frac{4yx^3\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \lim\limits_{k\to0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(0,0+k)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(0,0)\,, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0+h)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=1, & si \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \lim\limits_{k\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=-1, & si \quad (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Donc, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

1.11 Differentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1.11.1 Differentielle en un point :

Définition 7. On dit q'une fonction $f : D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (D un ouvert) est differentiable en un point $M(a,b)\in\mathbb{R}^2$ s'il existe une aplication linéaire $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telles que pour tout $H(h,k)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $M+\in\mathbb{R}^2$,

$$f(M+h)-f(M)=L(H)+\|h\|\,\epsilon(H) \quad et \quad \lim_{h\to0}\epsilon(h)=0. \tag{1.1}$$

L'application linéaire L est appelée différentielle de f en M, et elle noté $df(M)$. On a $df(M)(H)=L(H)$.

A lieu de (1.1), on peut ecrire

$$\lim_{H\to(0,0)}\frac{f(M+H)-f(M)-L(H)}{\|h\|}=0.$$

Théorème 1. *Si f admet des dérivées partielles en $M(a,b)$, alors elle est différentiable en $M(a,b)$ si*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Exemple 10. 1) La fonction $f(x,y)=xy-2x-3y$ est différentiable en $(0,0)$. En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-h(-2)-k(-3)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk-2hk+3hk-h(-2)-k(-3)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r} \\
&= \lim_{r\to0} r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)=0.
\end{aligned}$$

Car $|r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)|\leq r\to0$ quand $r\to0$.
2) La fonction $f(x,y)=xy-3x^2$ est différentiable en $(1,2)$. En faisant le changement de variable

$$\begin{cases} h-1=r\cos(\theta), \\ k-2=r\sin(\theta). \end{cases}$$

En effet

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(1,2)} \frac{f(-1+h,-2+k)-f(1,2)-(h-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)-(k-2)\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(1,2)} \frac{f(h-1,k-2)+1+4(h-1)-(k-2)}{\sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(1,2)} \frac{(h-1)(k-2)-3(h-1)^2}{\sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos(\theta)(\sin(\theta)-3\cos(\theta))}{r} \\
&= \lim_{r\to0} r\cos(\theta)(\sin(\theta)-3\cos(\theta))=0.
\end{aligned}$$

Car $|r\cos(\theta)(\sin(\theta)-3\cos(\theta))|\leq 4r\to0$ quand $r\to0$.

Théorème 2. *Si f est différentiable en (a,b), alors f est continue en (a,b) et admet des dérivées partielles en (a,b). On a*

$$df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy,$$

appelée différentielle de f en (a,b). La réciproque est fausse.

Proposition 3. *Si f est de classe C^1 au voisinage de (a,b), alors f est différentiable en (a,b). La réciproque est fausse.*

Exercice 11. Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

$$(1)\ f(x,y) = xy + 3y^2, \quad (2,1). \quad (2)\ f(x,y) = xy - 2y^2, \quad (-2,3).$$

$$(3)\ f(x,y) = y\sqrt{x}, \qquad (4,1). \quad (4)\ f(x,y) = |y| \ln(1+x), \quad (0,0).$$

Solution : Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en (a,b) si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{(h-a)^2 + (k-a)^2}} = 0.$$

Remarque 6. On va examiner la différentiable au point indiqué pour la derniére fonction et les autres exemples, on laisse le lecteur les traiter comme l'exemple suivant ou comme l'exemple précedent 10.

La fonction$f(x,y) = |y| \ln(1+x)$ est différentiable en $(0,0)$. En effet

$$\lim_{(h,k)\to(4,1)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - 0 - h(0) - k(0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|k| \ln(1+h)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\sin(\theta)\ln(1+r\cos(\theta))}{r}$$

$$\leq \lim_{r\to 0} 2r\,|\sin(\theta)\cos(\theta)|$$

$$\leq \lim_{r\to 0} 2r = 0.$$

1.12 Formule de Taylor

Proposition 4. *Si f est de classe C^2 au voisinage de (a,b), alors*

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] + o\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right).$$

1.13 Exercices corrigés

Exercice 12. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution : 1) -(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) En $(0,0)$: Elle est aussi continue en $(0,0)$. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} \frac{r^3 \cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \\ &= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} r\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 0 = f(0,0), \end{aligned}$$

d'où, f est continue en $(0,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Les dérivées partielles par rapport à x et y est :

(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - y^2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k\times 0}{k^2+0} - 0}{k} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3 - y^4}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0, & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{k \to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = 0, & si \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3) Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Comme suivant le chemain $y = x$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

alors $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Donc f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
4) Comme f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour qu'elle soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$ il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

comme suivant le chemain $k = k$, on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Exercice 13. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & si \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

1) Montrer que f est discontinue au point $(0, 0)$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Calculer $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.
3) Montrer que f admet des dérivées partielles premières au point $(0, 0)$?
4) Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point. Que peut-on déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

Solution : 1) (i)- Sur $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: La fonction f est continue sur $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
(ii)- En $(0,0)$: Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \\ &= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} r\cos^2(\theta)\sin(\theta)=0=f(0,0),\end{aligned}$$

d'où, f est continue en $(0,0)$.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Les dérivées partielles par rapport à x et y :
(i) Sur $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^4-y^2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\times 0}{h^2+0}-0}{h}=0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k\times 0}{k^2+0}-0}{k}=0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3) Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Comme suivant le chemain $y = x$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. Donc f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
4) Comme f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour qu'elle soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$ il faut que

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.
\end{aligned}$$

Comme suivant le chemain $k = k$, on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Exercice 14. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe C^1.
2) Les dérivées partielles secondes sont-elles continues en $(0,0)$. Que peut-on déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Solution : 1) (i)- Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii)- En $(0,0)$: Elle est aussi continue en $(0,0)$. En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta)) \\
&= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} \frac{r^4 \sin^4(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\
&= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} r^2 \sin^4(\theta) = 0 = f(0,0),
\end{aligned}$$

d'où, f est continue en $(0,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Les dérivées partielles par rapport à x et y est

(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^5+4y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\times 0}{h^2+0}-0}{h} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{k}{k^2+0}-0}{k} = \lim_{k\to 0} k = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0)}{h} = 0, & si \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = 0, & si \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

3) Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Comme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{-2r^5\cos(\theta)\sin^4(\theta)}{r^4} = \lim_{r\to 0} -2r\cos(\theta)\sin^4(\theta) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}f(0,0),$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{r\to 0}\frac{r^5\left(\sin^5(\theta)+4\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)\right)}{r^4} \\ &= \lim_{r\to 0} r\left(2\sin^5(\theta)+\cos(\theta)\sin^4(\theta)\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\end{aligned}$$

alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continue en $(0,0)$. Donc f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

On en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\begin{cases}\frac{4xy^3\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0+h,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\begin{cases}\frac{4yx^3\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ \lim\limits_{k\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(0,0+k)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\begin{cases}\frac{-8x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0+h)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=1, & si \quad (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=\begin{cases}\frac{-8xy^3\left(x^2+y^2\right)^2+xy^5\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{-8x^3y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ \lim\limits_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=-1, & si \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ ne sont pas continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\lim_{r\to 0}\cos^3(\theta)\sin^3(\theta)\,,$$

n'existe pas, alors la fonction f n'est pas de classe C^2(c-à-d $f\notin C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exercice 15. Soit la fonction $f\,:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

1) Montrer que f est discontinue au point $(0,0)$.
2) Montrer que f admet des dérivées partielles premières au point $(0,0)$.

Solution : 1) La continuité de f :

(i)- Sur $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: La fonction est clairement continue dans $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii)- En $(0,0)$: Elle est discontinue en $(0,0)$. En effet, on considère la suite $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}^2$, on a

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\longrightarrow(0,0)\,,\ quand\ n\to+\infty,$$

et

$$f(x_n,y_n)=f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{2},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Donc f est discontinue en $(0,0)$.
2) On utilise la définition pour montrer l'existence des dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^6+0} - 0}{h} = 0,$$

d'où, la limite étant finie, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.
Et

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0\times k}{0+k^2} - 0}{k} = 0,$$

d'où, la limite étant finie, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Exercice 16. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^6+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^2$?
3. Est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Solution : 1) (i)- Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
(ii)- En $(0,0)$: Elle est aussi continue en $(0,0)$. En effet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} \frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0,\,\forall\theta} r\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 0 = f(0,0),$$

d'où, f est continue en $(0,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Les dérivées partielles par rapport à x et y est f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ si les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

(i) Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^4 - y^2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

(ii) En $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\times0}{h^2+0}-0}{h}=0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{k\times0}{k^2+0}-0}{k}=0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
3) Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Comme suivant le chemain $y=x$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)=\frac{1}{2}\neq0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. Donc f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, mais de classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$.
4) Comme f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Pour qu'elle soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$ il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Comme suivant le chemain $y = x$, on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Mais f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 17. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (1,0), \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$:
1.1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
1.2. Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
1.3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
1.4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$?
2. Étude de la fonction en $(1,0)$:
2.1. Montrer que f est continue en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
2.2. Calculer le gradient de f en $(1,0)$.
2.3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;
2.4. f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?

Solution : (i) Étude sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$: La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x-1)^3 y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2},$$

et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$.
Comme $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
(ii)- Etude en $(1,0)$: Elle est aussi continue en $(1,0)$. En effet

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(1 + r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} \frac{r^3 \cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} r\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 0 = f(1,0),$$

d'où, f est continue en $(1,0)$.
2) Les dérivées partielles en $(1,0)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 1} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 1} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k\times 0}{k^2+0}-0}{k}=0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{-y^2(x-1)^2+y^4}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, & si \quad (x,y)\neq(1,0),\\ \lim\limits_{h\to 1}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(1,0),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2(x-1)^3y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}, & si \quad (x,y)\neq(1,0),\\ \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(1,0).\end{cases}$$

Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(1,0)$, il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{f(x,y)-f(1,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)-\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(1,0)}\frac{f(1+h,k)-f(1,0)-(h-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{\sqrt{(1+h)^2+k^2}},$$

comme suivant le chemain $k=h-1$, on a

$$\lim_{(h,h-1)\to(1,0)}\frac{f(1+h,k)-f(1,0)-(h-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{\sqrt{(-1+h)^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(1,0)}\frac{(h-1)k^2}{\sqrt{(-1+h)^2+k^2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\neq 0,$$

alors f n'est pas différentiable en $(1,0)$.
Comme f n'est pas différentiable en $(1,0)$, elle n'est pas de classe C^1 en $(1,0)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe C^1 en $(1,0)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{h\to 1}\frac{\partial f}{\partial h}(h,k),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\partial f}{\partial k}(h,k).$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x-1)=\frac{1}{2}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, on conclut que $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$, n'est pas continue en $(1,0)$, donc f n'est pas de classe C^1 en $(1,0)$.

Exercice 18. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+1)x^2}{x^2+(y+1)^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,-1), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,-1), \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$. :
1.1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$. ;
1.2. Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$. ;
1.3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$. ;
1.4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$?
2. Étude de la fonction en $(0,-1)$:
2.1. Montrer que f est continue en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$. ;
2.2. Calculer le gradient de f en (1,0) ;
2.3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$;
2.4. f est-elle de classe C^1 en (0,-1) ?

Solution : (i) Etude sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$: La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(1+y)^3}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 \frac{x^2-(1+y)^2}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2},$$

et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$ car quotient de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\})$.
Comme $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\})$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$.
(ii)- Etude en $(0,-1)$: Elle est aussi continue en $(0,-1)$. En effet

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} f(1+r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0,\, \forall\theta} r\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 0 = f(0,-1),$$

d'où, f est continue en $(0,-1)$.
2) Les dérivées partielles en $(0,-1)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \lim_{h\to 1} \frac{f(h,0)-f(0,-1)}{h} = \lim_{h\to 1} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0}-0}{h} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = \lim_{k\to -1} \frac{f(0,-1+k)-f(0,-1)}{k} = \lim_{k\to -1} \frac{\frac{k\times 0}{k^2+0}-0}{k} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{2x(1+y)^3}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,-1)\,,\\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,-1)-f(0,-1)}{h}=0, & si \quad (x,y)=(0,-1)\,,\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+x^2(1+y)^2}{\left(x^2+(1+y)^2\right)^2}, & si \quad (x,y)\neq(0,-1)\,,\\ \lim\limits_{k\to -1}\frac{f(0,-1+k)-f(0,-1)}{k}=0, & si \quad (x,y)=(0,-1)\,.\end{cases}$$

Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$, il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{f(x,y)-f(0,-1)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)(y+1)}{\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,-1)}\frac{f(h,-1+k)-f(0,-1)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)}{\sqrt{h^2+(k-1)^2}},$$

comme suivant le chemain $k=h+1$, on a

$$\lim_{(h,h-1)\to(0,-1)}\frac{f(h,-1+k)-f(0,-1)-(h-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)}{\sqrt{(-1+h)^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,-1)}\frac{(h-1)k^2}{\sqrt{(-1+h)^2+k^2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\neq 0,$$

alors f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.
Comme f n'est pas différentiable en $(0,-1)$, elle n'est pas de classe C^1 en $(0,-1)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe C^1 en $(0,-1)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)=\lim_{h\to 0}\frac{\partial f}{\partial h}(h,k)\,,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)=\lim_{k\to -1}\frac{\partial f}{\partial k}(h,k)\,.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x+1)=\frac{1}{2}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$, on conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, n'est pas continue en $(1,0)$, donc f n'est pas de classe C^1 en $(0,-1)$.

Exercice 19. Calculer les polynômes de Taylor à l'ordre 1 (i.e., l'équation du plan tangent) et à l'ordre 2 au voisinage du point (a,b) des fonctions $f\ :\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y)=1+x+y+x^3+xy-xy^2$ au voisinage du point $(-1,1)$.
2. $f(x,y)=1+x+y+x^3+xy-xy^2$ au voisinage du point $(0,0)$.

3. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(1,2)$.
4. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(0,0)$.
5. $f(x,y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(1,1)$.
6. $f(x,y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(0,0)$.
7. $f(x,y) = 1 - x + y + x^2 + xy^3$ au voisinage du point $(0,0)$.

Solution : On va écrire le polynôme de Taylor à l'ordre 1 et 2 au voisinage du point (a,b) indiquée des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 1 + x + y + x^3 + xy - xy^2$ au voisinage du point $(-1,1)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 3x^2 + y - y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + x - 2xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6xy,\quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 2y.$$

$$f(-1,1) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x} f(-1,1) = 4,\ \frac{\partial}{\partial y} f(-1,1) = 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = -6,\quad = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1) = -1.$$

Donc, d'après la proposition 4, le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est :

$$z = f(x,y) = f(-1,1) + (x+1)\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 4x + 2y + 2.$$

Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est : $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1$.

D'une manière similaires, on trouve le plan tangente pour les autres fonctions :

2. $f(x,y) = 1 + x + y + x^3 + xy - xy^2$ au voisinage du point $(0,0)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = 1 + x + y$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est :

3. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(1,2)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = 1 + x + y$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est $z = -3x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$.

4. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(0,0)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = 1 + x + y$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est : $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1$.

5. $f(x,y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(1,1)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = x + y + 1$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est : $z = x + y + 1$.

6. $f(x,y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(0,0)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = 1 + x + y$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est : $1 + x + y$.

7. $f(x,y) = 1 - x + y + x^2 + xy^3$ au voisinage du point $(0,0)$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 (i.e., plan tangent) est : $z = 1 - x + y$.
Et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 est : $1 - x + y - x^2$.

Chapitre 2

Extremums (Maximum, Minimum).

2.1 Optimisation de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 8. 1) On dit que f est bornée dans $D \subset \mathbb{R}^2$ s'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \ f(X) \leq C.$$

2) On dit que f admet unmaximum (resp.minimum) global (ou absolu) en $X_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ si

$$\forall X \in D, \ f(X) \leq f(X_0) \quad (resp \quad f(X) \geq f(X_0)).$$

3) On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local (ou relatif) en $X_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ s'il existe un ouvert $V(x_0, y_0)$ (Voisinage) contenant $X_0 = (x_0, y_0)$ tel que

$$\forall X \in D \cap V, \ f(X) \leq f(X_0) \quad (resp \quad f(X) \geq f(X_0)).$$

2.1.1 Extrema libres

2.1.1.1 Point stationnaire ou critique :

Proposition 5. *(Théorème de Fermat : condition nécessaire du premier ordre). Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M(a, b) \in D$ (M un point de D) et f admettant des dérivées partielles en M. Si f présente un extremum local en M, alors*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0.$$

On dit que M est un point critique (ou, point stationnaire).

Remarque 7. La réciproque est fausse.

2.1.1.2 Nature d'un point critique :

Théorème 3. *(Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables)). Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire, posons*

$$det(H_f(x_0, y_0)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)\right),$$

le déterminant de la matrice hessienne de f évalué en (x_0, y_0).

1) Si det $(H_f(x_0, y_0)) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0, y_0), il s'agit

a) d'un maximum si $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) < 0$,

b) d'un minimum si $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) > 0$,

2) Si det $(H_f(x_0, y_0)) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0), ce n'est pas un extrémum,

3) Si det $(H_f(x_0, y_0)) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.
En résumé, si $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0, y_0), est déterminée par le tableaux suivant :

det $(H_f(x_0, y_0))$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)$	*Nature de point* (x, y)
$+$	$+$	*minimum local*
$+$	$-$	*maximum local*
$-$		*point-selle*
0		*on ne peut pas conclure*

2.1.1.3 Examples :

Exemple 11. On veut étudier la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Elle a pour dérivées partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x - 2$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y - 4$ qui ne s'annulent qu'en $(1, 2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$df(h, k) = f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = h^2 + k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1, 2) = 2 > 0$ *et* $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1, 2) = 2$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1, 2) = 0$ et $det(H_f(1, 2)) = 4 > 0$, , donc, il s'agit bien d'un minimum.

Exemple 12. Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie à priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \ ou\ x = 1, \\ y = -\frac{1}{3}, \ ou\ y = 1. \end{cases}$$

Donc, Les deux candidats (les critiques) sont $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $(1, 1)$.

Classification : a) Comme $det\left(H_f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right) < 0$, alors $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ est un point selle.
b) Comme $det(H_f(1, 1)) < 0$, alors, f admet en $(1, 1)$ un minimum local de valeur $f(1, 1) = -1$. Ce minimum est cependant pas global puisque, par exemple $f(0, -2) = -6 < 0$.

Exemple 13. On veut étudier la fonction $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. Elle a pour dérivées partielle$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3y - 3x^2$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 3y - 3y^2$ qui ne s'annulent qu'en $(1, 1)$, $(0, 0)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$df(h,k) = f(1+h, 2+k) - f(1,2) = h^2 + k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) = -6 < 0 \quad et \quad s = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1,1) = -6,\ t = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1) = 8$ et

$$\Delta = det(H_f(1,2)) = rt - s^2 = -28 < 0,$$

$\Delta = det(H_f(x_0, y_0))$	$r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)$	Nature de point (x, y)
$(0,0)+$	$+$	minimum local
$(1,1)+$	$-$	maximum local

Donc, il s'agit bien d'un minimum.

2.2 Exercices corrigés

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que

$$f(a,b) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = 3,\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(a,b) = 1,\ et\ \frac{\partial f}{\partial y^2}(a,b) = 2.$$

Le point (a,b) est-il un point critique ? Si oui, de quelle nature ?

Solution : Il est un point critique et plus particulièrement il s'agit d'un point-selle. En effet

$$det(H_f(a,b)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b)\right) = 2 - 3 = -1 < 0.$$

Exercice 21. On suppose que $(1,1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(1,1) = 4,\ et\ \frac{\partial f}{\partial y^2}(1,1) = 2.$$

2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 4,\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(1,1) = 3,\ et\ \frac{\partial f}{\partial y^2}(1,1) = 2.$$

Solution : 1) On a

$$det(H_f(1,1)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1,1) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1)\right) = 7 > 0,$$

et $\frac{\partial f}{\partial x^2}(1,1) = 4 > 0$.
Donc, il s'agit d'un minimum local en $(1,1)$.

2) On a

$$det\left(H_f\left(1,1\right)\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\left(1,1\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\left(1,1\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f\left(1,1\right)\right)=-1<0,$$

et $\frac{\partial f}{\partial x^2}\left(1,1\right)=4<0$.
Donc, f a un point-selle en $(1,1)$.

Exercice 22. Déterminer et établir la nature des points critiques des fonction t $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par

1) $f\left(x,y\right)=x^2+y^2+xy+y$.
2) $f\left(x,y\right)=xy-2x-2y-x^2-y^2$.
3) $f\left(x,y\right)=\left(x-y\right)\left(1-xy\right)$.
4) $f\left(x,y\right)=y^3+3x^2y-6x^2-6y^2$.
5) $f\left(x,y\right)=e^x\cos\left(y\right)$.
6) $f\left(x,y\right)=y\cos\left(y\right)$.
7) $f\left(x,y\right)=y^2+xy\ln\left(x\right)$.

Solution : 1) La fonction f est de classe C^2 dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,y\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=0\\ x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=-\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Donc, Le seul candidat (le point critique) est $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Classification : Comme $det\left(H_f\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right)=3>0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)>0$, alors $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ est un minimum.
2) La fonction $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,y\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-2x-2=0\\ x-2y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2,\\ y=-2.\end{cases}$$

Donc, Le seul candidat (le point critique) est $(-2,-2)$.

Classification : Comme $det\left(H_f\left(-2,-2\right)\right)=3>0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(-2,-2\right)<0$, alors $(-2,-2)$ est un maximum.
3) La fonction $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ -x^2 + 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \ ou\, x = 1, \\ y = -1, \ ou\, y = 1. \end{cases}$$

Donc, Les deux candidats (les points critiques) sont $(-1,-1),(1,1)$.

Classification : a) Comme $det(H_f(-1,-1)) < 0$ alors $(-1,-1)$ est un point-selle.
b) Comme $det(H_f(1,1)) < 0$ alors, $(1,1)$ est un point-selle.
5) La fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos(y) = 0, \\ -e^x \sin(y) = 0, \end{cases}$$

d'où, les deux équations n'admet aucune solutions. Donc, la fonction n'admet aucun point critique.
6) La fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y\sin(x) = 0, \\ \cos(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

On a une infinité de points critiques alignés sur la droite d'équation $y = 0$ et qui ont ordonnée $x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), \ k \in \mathbb{Z}$.

Classification : a) Comme $det(H_f(x,y)) = -\sin^2(x) < 0$ alors ils sont tous des points-selle.
7) La fonction $f \in C^2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\})$.

Recherche de points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 + \ln(x)) = 0, \\ 2y + x\ln(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \ ou\, x = \frac{1}{e}, \\ y = 0, \ ou\, y = \frac{1}{2e}. \end{cases} .$$

Donc, les points critiques sont : $(1,0), \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)$

Classification : a) Comme $det(H_f(1,0)) < 0$ alors $(1,0)$ points-selle.
b) Comme $det\left(H_f\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)\right) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right) > 0$, alors $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)$ est un minimum.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -y\sin(x)=0, \\ \cos(x)=0, \end{array} \right. \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Exercice 23. Une société produit deux types d'ampoules : $E17$ et $E24$. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type $E17$ produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$ où p_1 est le prix de vente en dinnars. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type $E24$ produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en dinnars. Les coûts communs de production de ces ampoules est $C = 2xy$ (en milliers de dinnars). Par conséquent, le bénéfice de la société (en milliers de dinnars) est une fonction de deux variables x et y. Déterminer le profit maximal de la société.

Solution : La fonction profit en milliers de dinnars est

$$p(x,y) = p_1x + p_2x - C(x,y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy.$$

Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 50-2x-2y=0, \\ 60-4y-2x=0, \end{array} \right. \Rightarrow (x,y)=(20,5).$$

Classification (la nature de ces points) : Comme $det\,(H_p(20,5)) = 4 > 0$ alors $(20,5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20,5) = 650$. Donc, La société réalise le profit maximal de 650000 dinnars lorsqu'elle vend 20000 ampoules $E17$ à 30 dinnars l'une et 5000 ampoules $E24$ à 50 dinnars l'une.

Exercice 24. Vous êtes le directeur financier d'une société. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par un menbre de cette société a établi que si la firme (société) consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300 + 6\sqrt{x} - 10y$ pièces. La firme fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Solution : a) Revenu de la vente : $y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
b) Coût de production : $3(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
c) Coût de développement et de publicité : $3000 + x$.
Profit = (Revenu de la vente) - (Coût de production) - (Coût de développement et de publicité).
Le profit de la firme à maximiser est donc la fonction

$$\underset{x \mapsto f(x,y) = (y-3)\left(300+6\sqrt{x}-10y\right) - x - 3000.}{f:\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \to \mathbb{R}}$$

Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0, \\ 330 - 6\sqrt{x} - 20y = 0, \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (164025, 138).$$

Classification (la nature de ces points) : Comme $det\left(H_f\left(164025, 138\right)\right) = -\frac{241}{32805} < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(164025, 1388\right) = -20 < 0$ alors $(164025, 138)$ est un point de maximum pour f et le profit maximal vaut $f\left(164025, 138\right) = 15225$. Donc, la société va consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f\left(164025, 1388\right) = 15225$ euros.

Chapitre 3

Intégrales doubles

Dans ce chapitre nous allons étendre la notion d'intégrale définie aux intégrales doubles des fonctions de deux variables. Ces notions sont ensuite exploitées pour calculer des volumes, des aires de surfaces.

3.1 Intégrale double d'une fonction continue

Dans cette section, nous définissons l'intégrale d'une fonction de deux variables, appelée intégrale double, et nous montrons comment l'évaluer. Elle nous permettra, entre autres, de calculer l'aire d'un domaine d'intégration, ainsi que le volume d'un solide limité par les graphes de fonctions de deux variables.

Soit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a \leq x \leq b \, et \, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}, \tag{3.1}$$

où $\varphi \, : \, x \mapsto \varphi(x) \;\; et \; \psi \, : \, x \mapsto \psi(x)$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\varphi \leq \psi$.
Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y : soit où $\varphi \, : \, y \mapsto \varphi(y) \;\; et \; \psi \, : \, y \mapsto \psi(y)$ deux fonctions continues sur $[c,d]$ avec $\varphi \leq \psi$.
Notons l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, c \leq y \leq d \, et \, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}. \tag{3.2}$$

Théorème 4. *(Théorème de FUBINI) .Si la conditon* (3.1) *est vérifiée. Alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dydx.$$

Si la conditon (3.2) *est vérifiée. Alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dxdy.$$

Exemple 14. On veut calculer l'intégrale double sur $D = [0,1] \times [0,2]$:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^2 xe^{xy} dxdy.$$

On a

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^2 xe^{xy} dxdy \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^2 e^{xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_0^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(e^{2x} - 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2) On veut calculer l'intégrale double

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

sur

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2 \;\; et \;\; x^2 \leq y \leq 2x \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx \\
&= \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{14}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^6}{3}\right]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

Deuxième méthode. Le domain D peut être décrit par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 4 \ \ et \ \ \sqrt{y} \leq x \leq \frac{y}{2}\right\}.$$

On a

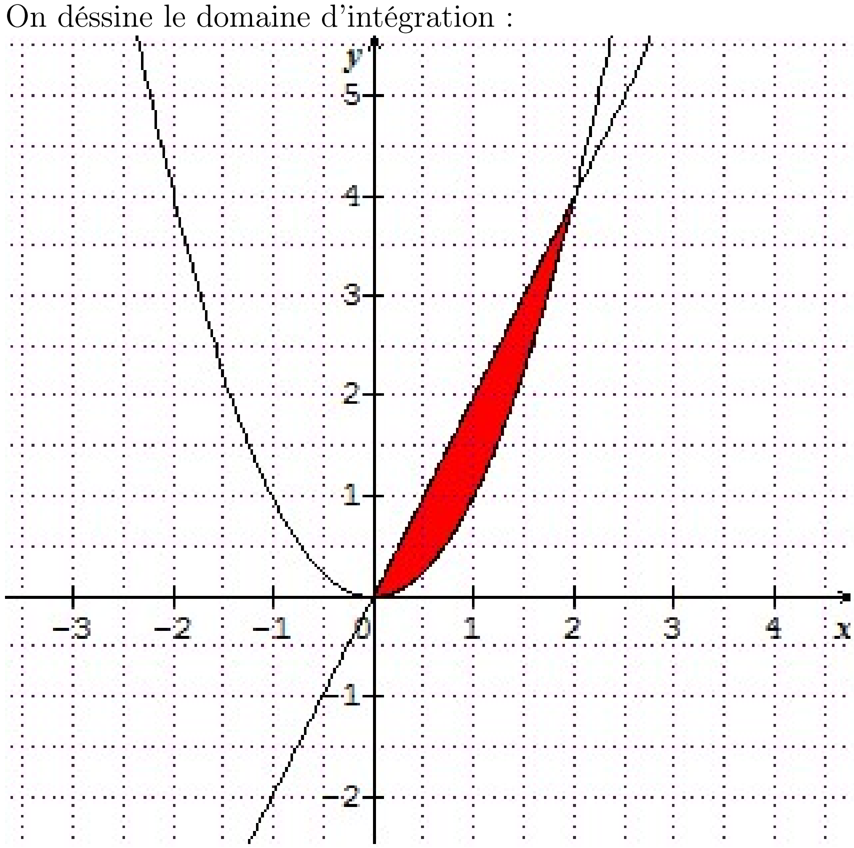
$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{2}} \left(x^2 + y^2\right) dydx$$

$$= \int_0^4 \left(\left[y^2 x + \frac{x^3}{3}\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\frac{y}{2}}\right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}^3}{3} + y^2\sqrt{y} - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^3}{3} - y^2\left(\frac{y}{2}\right)\right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{13y^2}{24}\right]_0^4 = \frac{216}{35}.$$

On déssine le domaine d'intégration :



Remarque 8. Cas particulier

Si D est le rectangle

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b \, et \, c \leq y \leq d\right\}.$$

et si f est le produit d'une fonction qui ne dépend que de x et d'une fonction qui ne dépend que de y, i.e. $f(x, y) = h(x)\, g(y)$, alors

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \left(\int_a^b h(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

Exemple 15. On veut calculer l'intégrale double sur $D = [0, 1] \times [0, 2]$:

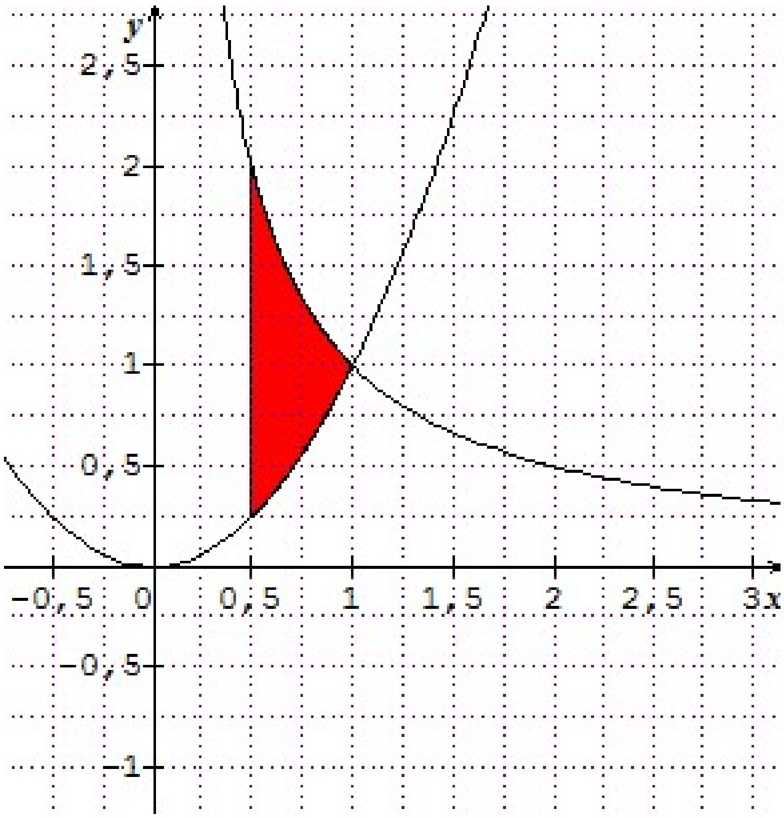
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^2 xydxdy.$$

On a

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^2 xydxdy \\
&= \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 ydy\right) \\
&= \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble délimité par les courbes d'équation $x = \frac{1}{2}$, $\quad xy = 1$ et $y = x^2$. On veut calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$



Cette intégrale mesure l'aire de la zone coloriée et on peut la calculer par plusieurs méthodes. Pour cela, il faut tout d'abord calculer les points d'intersection des courbes qui délimitent :

1) Soit par

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx = \left[\ln(x)-\frac{1}{3}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln(2)-\frac{7}{24}.$$

2) Soit par

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_{1}^{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}[x]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\,dy + \int_{1}^{2}[x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}\,dy = \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{y}{2}\right] + \left[\ln(y)-\frac{1}{2}y\right]_1^2 = \ln(2)$$

3.2 Changement de variables

Proposition 6. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux bijections de classe C^1. Considérons la fonction de changement de variables*

$$x \mapsto \overset{F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2}{F(x=\varphi(u,v),\, y=\psi(u,v))}$$

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot J dudv,$$

où

$$J = det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v) & \frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v) - \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v),$$

appelé déterminant de la matrice jacobien de la fonction F.

3.2.1 Cas des coordonnées polaires

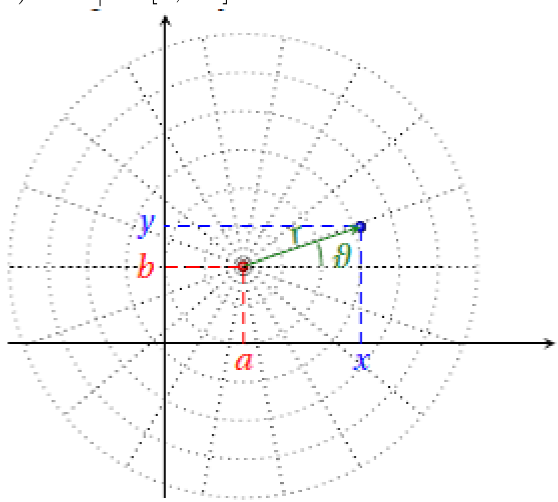
Le changement de variables en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = a + r\cos(\theta), \\ y = b + r\sin(\theta), \end{cases}$$

est donné par l'application

$$(r,\theta) \longmapsto (x = a + r\cos(\theta),\ y = b + r\sin(\theta)),$$

où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ sont les coordonnées du point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$.



Cette application a jacobienne

$$J = det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}\varphi(r,\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}\psi(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}\psi(r,\theta) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r.$$

Donc

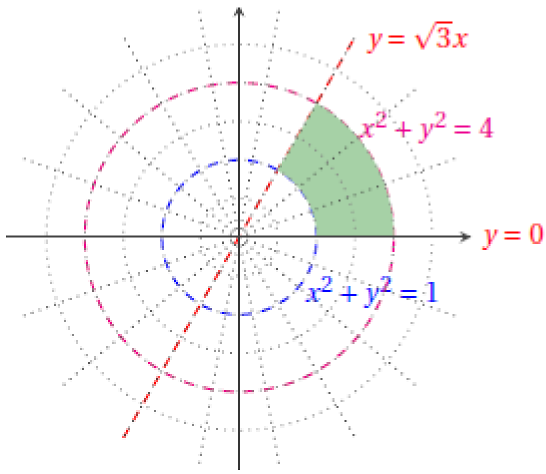
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) \cdot r dr d\theta.$$

Exemple 16. On veut calculer

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy,$$

sur l'ensemble

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le x\sqrt{3}\ \ et\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}.$$



Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos(\theta),\\ y=r\sin(\theta),\end{array}\right.$$

d'où

$$D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]\ :\ 0<\theta<\frac{\pi}{3}\ \ et\ \ 1<r<2\right\}.$$

On doit alors calculer

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2\frac{r}{1+r^2}drd\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2\frac{r}{1+r^2}dr$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}[x]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\,dy+\int_1^2[x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}\,dy$$

$$=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{y}{2}\right]+\left[\ln(y)-\frac{1}{2}y\right]_1^2$$

$$=\ln(2)-\frac{7}{24}.$$

3.3 Quelques intégrales remarquables

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\left(\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)}$$

$$= \sqrt{\int_0^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dydx}$$

$$= \sqrt{\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}d\theta dr}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3.4 Exercices corrigés

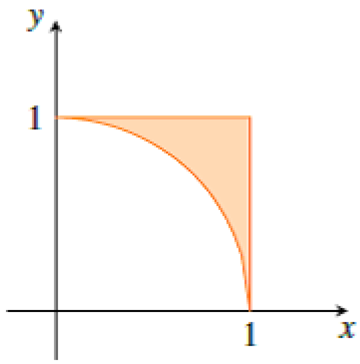
Exercice 25. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

sur l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \ \ et \ \ 1 \leq x^2+y^2\right\}.$$

Solution : La partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est l'intersection du carré $[0,1] \times [0,1]$ et de l'extérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. La fonction f est continue sur D.



A l'aide du théorème de Fubini, on a

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2} dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{2y}{1+x^2+y^2} dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln\left(2+x^2\right) - \ln(2)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right] dx.$$

Pour calculer la dernière intégral, en faisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow du = dx \\ x \to 0,\ u \to 0, \\ x \to 1,\ u \to \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On obtient

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{x}{2} \left[\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+u)\, du$$

$$= \left[(1+u)\ln(1+u) - (1+u)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}.$$

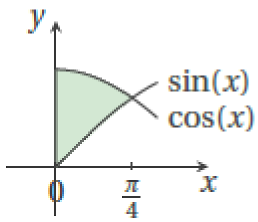
Exercice 26. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (y+1)\,dxdy,$$

sur l'ensemble

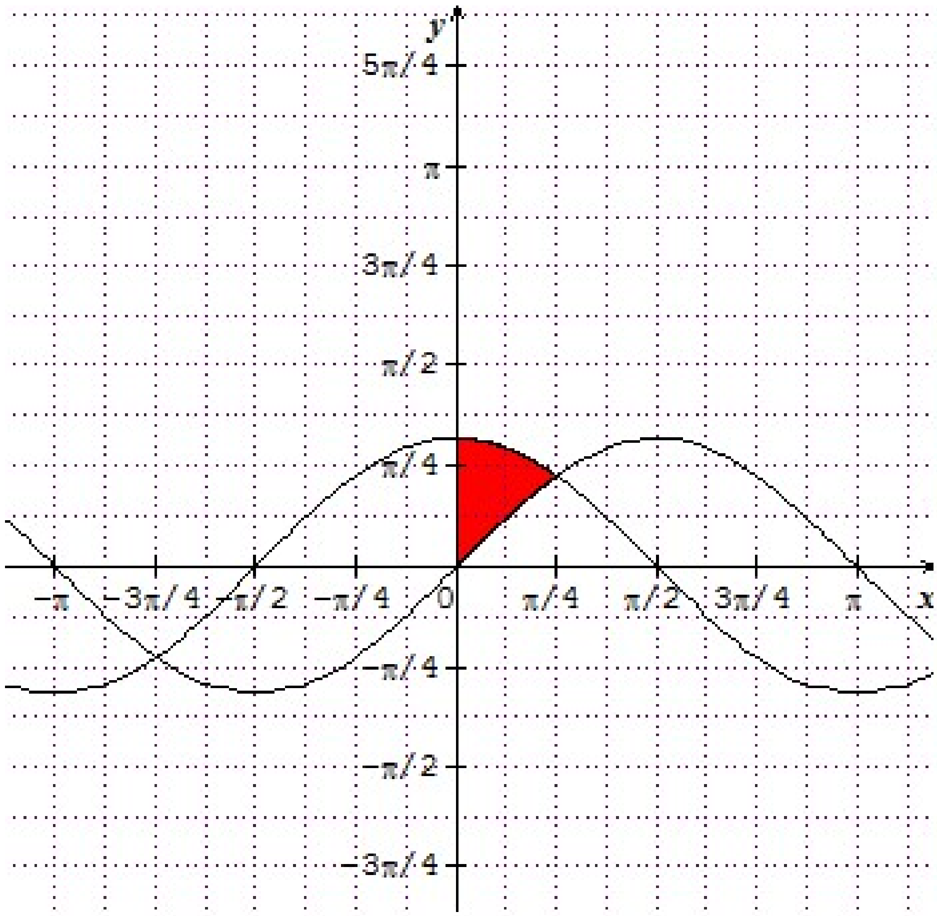
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \;\; et \;\; \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\right\}.$$

Solution : Le domaine D est :



On a

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} (1+y)\,dydx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2 + y\right]_{\sin(x)}^{\cos(x)} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x) - \sin(x)\right] dx$$
$$= \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \cos(x) + \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \frac{3}{4}.$$



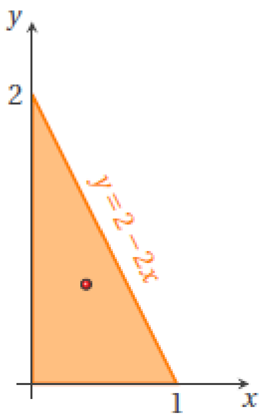
Exercice 27. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (1+3x+y)\,dxdy,$$

sur l'ensemble

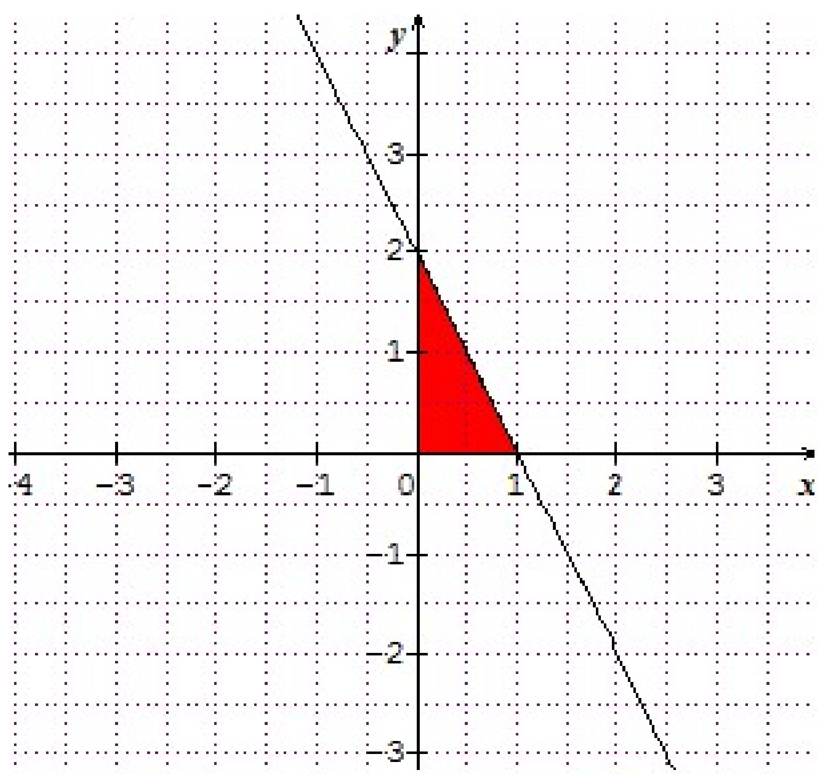
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \;\; et \;\; 0 \le y \le 2-2x\right\}.$$

Solution : Le domaine D est un triangle, où l'équation de la frontière supérieure est $y = 2 - 2x$:



On a

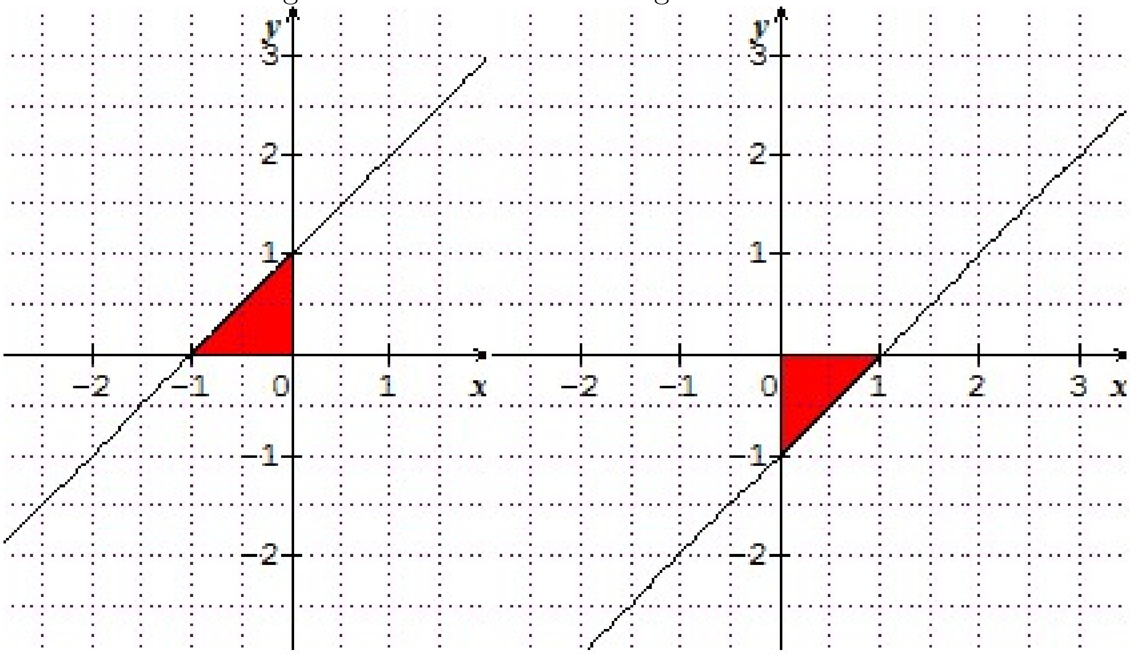
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+3x+y)\,dydx$$
$$= \int_0^1 \left[y + 3xy^2 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-2x} dx$$
$$= 4\int_0^1 \left(1-x^2\right) dx = 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$



Exercice 28. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D xydxdy,$$

sur l'ensemble d'intégration est coloré dans la figure ci-contre.



Solution :

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 0 \; et \; 0 \leq y \leq x+1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \; et \; x-1 \leq y \leq 0\right\}.$

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} xydydx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{0} xydydx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{1+x} dx + \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x-1}^{0} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x^2 + x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 29. Calculer l'intégrale double suivante

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

en traçant au préalable D, avec

$$f(x,y) = x, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x - y + 1 \geq 0 \; et \; x + 2y - 4 \leq 0\right\}.$$

$$f(x,y) = x + y, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \; et \; x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

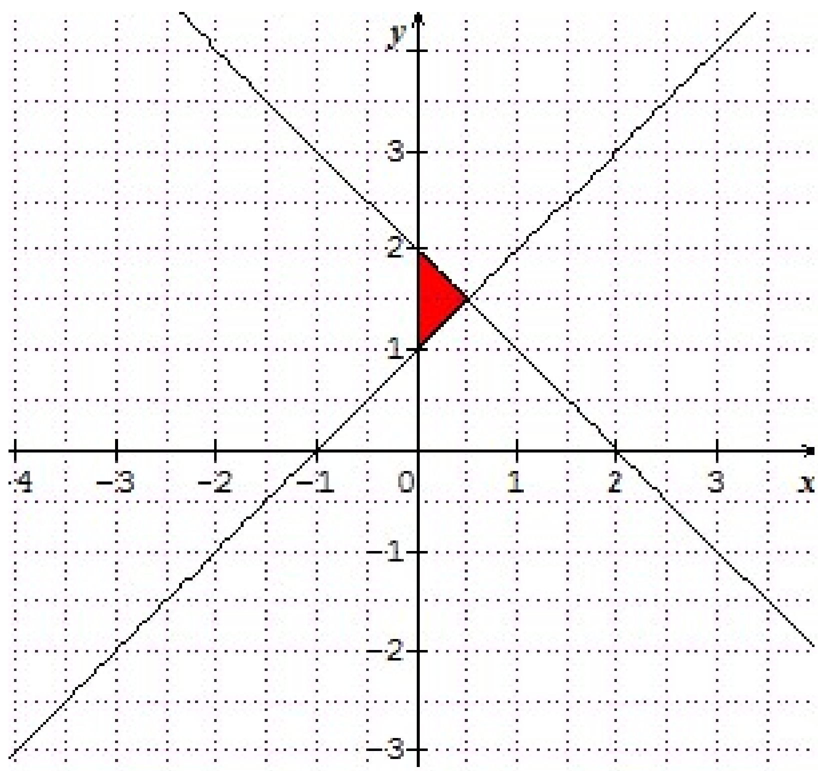
$$f(x,y) = \cos(xy), \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2 \; et \; 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$f(x,y) = xy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, \; y \geq 0 \; et \; xy + x + y \leq 1\right\}.$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x < 3, \; y > 2 \; et \; x + y < 5\right\}.$$

Solution : 1) On a

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x - y + 1 \geq 0 \; et \; x + 2y - 4 \leq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, \; x \geq y - 1 \; et \; x \leq 4 - 2y\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0 \; et \; y - 1 \leq x \leq 4 - 2y\right\}. \end{aligned}$$



D'autre part, pour que cette inégalité ait un sens, on doit avoir

$$y - 1 \leq 4 - 2y \Rightarrow y \leq 1.$$

Et

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y-1}^{4-2y} x\,dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{y-1}^{4-2y} dy$$

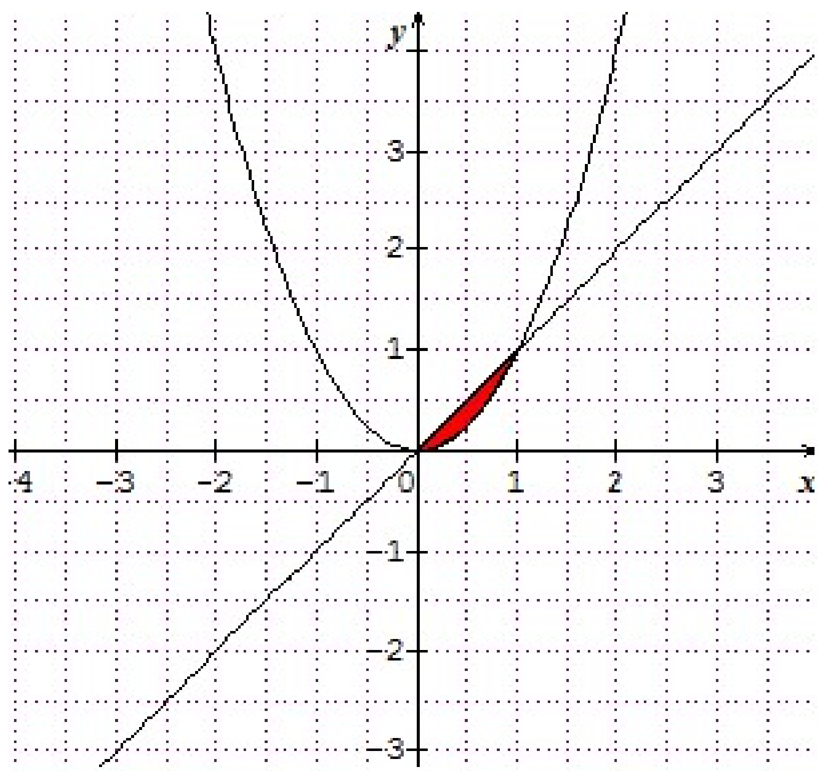
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(4-2y)^2 - (y-1)^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[15 - 18y + 3y^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[15y - 9y^2 + y^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{43}{8}.$$

2) On a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \; et \; x^2 \leq y \leq x\right\}.$$



Donc

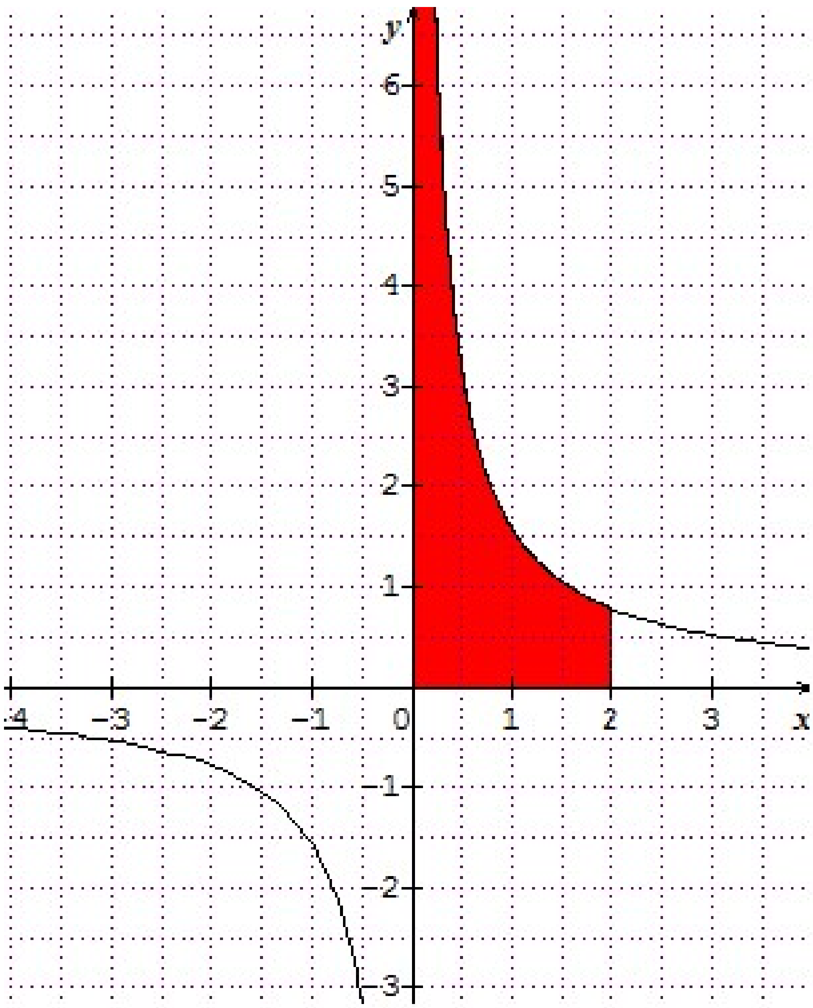
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_x^{x^2} (x+y)\,dydx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right] dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3\right]_0^1 = \frac{3}{20}.$$

3) On a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2 \; et \; 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1\leq x\leq 2\, et\, 0\leq y\leq \frac{\pi}{2x}\right\}.$$



Donc

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)\,dydx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x}\sin(xy)\right]_0^{\frac{\pi}{2x}} dx$$

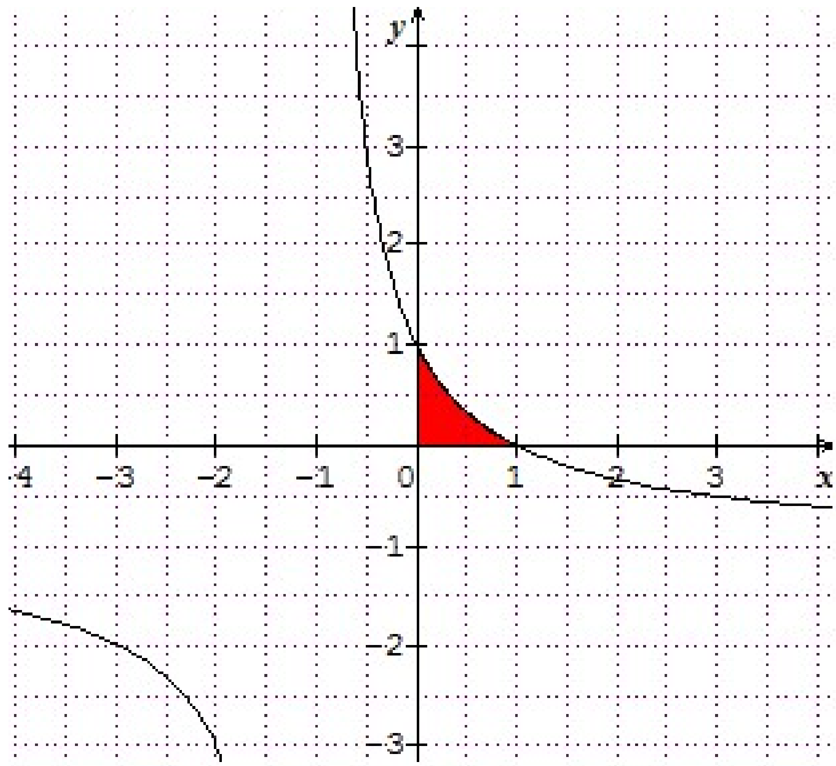
$$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2).$$

4) Le domaine s'écrit

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\geq 0,\ y\geq 0\, et\, xy+x+y\leq 1\right\}$$

$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\geq 0,\ y\geq 0\ \ et\ \ y(x+1)\leq 1-x\right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0 \ et \ y \leq \frac{1-x}{1+x} \right\}.$$



Puisqu'il est nécessaire que $1 - x \geq 0$, on a forcément $x \leq 1$. On en déduit :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xydydx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx.$$

On décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2} = x - 4 + \frac{8}{1+x} - \frac{4}{(1+x)^2}.$$

On obtient

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xydydx$$

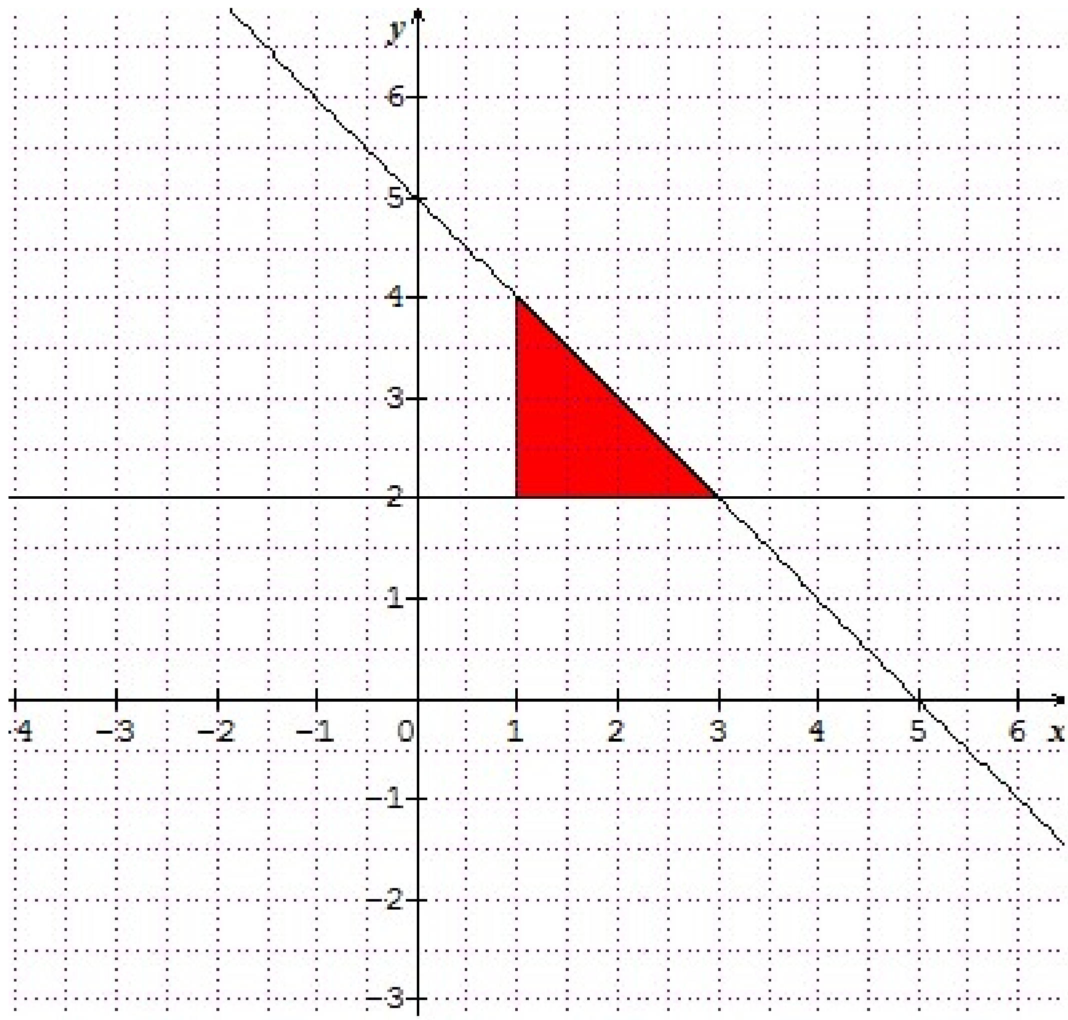
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 8\ln(1+x) + \frac{4}{1+x} \right]$$

$$= 4\ln(2) - \frac{11}{4}.$$

5) On a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x < 3,\ y > 2\, et\, x + y < 5\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x < 3,\ et\ 2 < y < 5 - x\right\}.$$



Donc

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^3 \int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^3} dydx$$
$$= \int_1^3 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx = \frac{2}{75}.$$

Chapitre 4

Intégrales généralisées (Impropres)

On défini et étudie les propriétés de l'intégrale, sur un intervalle fermé et borné (compact) d'une fonction intégrable, donc borné sur cette intervalle.

On propose maintenant d'étendre cette étude à des fonctions définies sur un intervalle I borné, non compact (ouvert ou semi-ouvert) et qui sont intégrables dans tout intervalle compact inclus dans I. Le problème qui se pose est alors le suivant : « Peut-on définir une intégrale de f dans tout intervalle I »

4.1 Définitions et premières propriétés

4.1.1 Fonction localement intégrable

Définition 9. Soit f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I.

4.1.2 Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

Définition 10. Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$, avec $a,\ b$ deux nombres réels tel que $a < b$. Si

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt = l \ (l \ finie,\ i.e.,\ existe).$$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ (Intégrale généralisée ou Intégrale impropre) est convergente. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 9. On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ pour une fonction f continue sur $]a, b]$.

4.1.3 Cas d'une fonction définie sur un intervalle non borné

Définition 11. Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$. Si

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = l \ (l \ finie,\ i.e.,\ existe).$$

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 10. On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ pour une fonction continue sur $]-\infty, a]$.

Exemple 17. 1) L'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-pt}dt,\ p > 0$ est convergente. En effet, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x e^{-pt}dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{p} - \frac{e^{-px}}{p}\right] = \frac{1}{p},$$

alors, $\int_a^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$ existe.

2) L'intégrale $\int_a^{+\infty} \sin(t)\,dt$ est divergente. En effet, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} (-\cos(x) - \cos(a))\ n'existe\ pas,$$

alors, $\int_a^{+\infty} \sin(t)\,dt$ n'existe pas (diverge).

Remarque : Pour $a = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \sin(t)\,dt = -\lim_{x\to+\infty} [\cos(x)].$$

Cette limite peut prendre une infinité des valeurs, ainsi nexiste pas. Par conséquent l'intégrale $\int_a^{+\infty} \sin(t)\,dt$ est divergente.

3) L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente. En effet, puisque

$$\lim_{x\to1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to1} [\arcsin(x)] = \frac{\pi}{2},$$

alors, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}$ existe (converge).

4) L'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{t}dt$ est divergente. En effet, puisque

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^2 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to0} [\ln(2) - \ln(x)] = +\infty\ n'existe\ pas,$$

alors, $\int_0^2 \frac{1}{t} dt$ n'existe pas (diverge).

5) L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt,\ a > 0$ est convergente. En effet, puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt = \lim_{x \to +\infty} 2 \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \frac{2}{\sqrt{a}},$$

alors, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt = \frac{2}{\sqrt{a}}$ existe (converge).

4.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale sur $[a, b[$

Théorème 5. *(Intégrales doublement impropres) Si f est localement intégrable sur $]a, b[$, $\forall c \in\ ]a, b[$, on pose*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt,$$

alors, $\int_a^b f(t)\, dt$ est converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre (i.e.,$\int_a^c f(t)\, dt$ et $\int_c^b f(t)\, dt$,) convergent.
Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge.

Remarque 11. Le théorème précédente montre que, pour étudier une intégrale doublement impropre, il faut la décomposer en deux intégrales impropres.

Exemple 18. 1) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente. En effet, $\forall c \in\ ]-\infty, +\infty[$ et puisque

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^c \frac{1}{1+t^2} dt + \lim_{x \to +\infty} \int_c^x \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) + \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \pi,$$

alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$ existe.

2) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\, dt$ est divergente. En effet, $\forall c \in\ ]-\infty, +\infty[$ (on prendra $c = 0$) et puisque

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 \sin(t)\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sin(t)\, dt = \lim_{x \to -\infty} (1 - \cos(x)) + \lim_{x \to +\infty} [-\cos(x) - 1]\ n'exist\, pas.$$

Exercice 30. Etudier la convergence de l'integrale suivante

$$\int_0^b \frac{1}{t^r} dt,\ b \neq 0,$$

où r est nombre réel donné.

Solution : On distingue deux cas : $r = 1$ ou $r \neq 1$.

1^{er} cas : si $r = 1$, on a

$$\int_0^b \frac{1}{t^r} dt = \lim_{x \to 0} \int_x^b \frac{1}{t} dt = \lim_{x \to 0^+} [\ln(b) - \ln(t)] = -\infty.$$

alors, $\int_0^b \frac{1}{t^r} dt$ diverge.

2^{eme} cas : si $r \neq 1$, on a

$$\int_0^b \frac{1}{t^r} dt = \lim_{x \to 0} \int_x^b \frac{1}{t^r} dt = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - r} \left[b^{1-r} - x^{1-r}\right] = \begin{cases} \frac{b^{1-r}}{1-r}, & r < 1, \\ \infty, & r > 1, \end{cases}$$

alors, $\int_0^b \frac{1}{t^r} dt$ diverge si $r > 1$ et converge si $r < 1$.

4.2.1 Intégrales de référence

Dans cette partie on donne quelques résultats fondamentaux des intégrales impropres de type spécial qui peuvent être utilisés à létude de la nature d'autre intégrale impropre.

Proposition 7. *(i) L'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est convergente si* $\alpha > 1$.

(ii) L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est divergente si* $\alpha \leq 1$.

(iii) L'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est convergente si* $\alpha < 1$.

(v) L'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est divergente si* $\alpha \geq 1$.

Exemple 19. 1) Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ sont convergentes

2) Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ sont divergentes.

Corollaire 1. *Si* $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors*

(i) L'intégrale impropre en a : $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

(ii)L'intégrale impropre en b : $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Proposition 8. *(i) L'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ *est convergente si* $\alpha > 0$.

(ii) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ *est divergente si* $\alpha \leq 0$.

Exemple 20. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ diverge car $\alpha = -1 \leq 0$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^t dt$ converge car $\alpha = 1 > 0$.

4.2.2 Linéarité

Théorème 6. *Soient f, g deux fonctions réelles localement intégrable. sur* $[a, b[$ *alors*
(i) Si $\int_a^b f(t) dt$ *converge et* $\int_a^b g(t) dt$ *converge, alors* $\int_a^b (f + g)(t) dt$ *converge. De plus, on a*

$$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

(ii) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge, alors* $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt$ *converge et on a* $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque 12. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont divergentes alors on ne peut rien conclure sur la nature de l'intégrale $\int_a^b (f+g)(t)\,dt$.

Par exemple si on prend lintégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.

Remarque 13. D'une part, on a

$$1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1+t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt,$$

et d'autre part, les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ sont divergentes, c'est-à-dire

$$1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1+t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt \neq \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt - \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt.$$

4.2.3 Intégration par partie

Théorème 7. *Soient* f, g *deux fonctions deux fonctions de classe* C^1 *sur* $[a, b[$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(i.e.,* $f, \ g \in C^1([a, b[\, , \mathbb{R})$*).*
Si $f \cdot g$ *possède une limite finie en* b^- *alors les intégrales impropres* $\int_a^b (f'g)(t)\,dt$ *et* $\int_a^b (fg')(t)\,dt$ *sont de même nature.*
Si de plus elles sont convergentes, alors

$$\int\limits_a^b (f'g)(t)\,dt = [f \cdot g]_a^b - \int\limits_a^b (fg')(t)\,dt.$$

4.2.4 Changement de variable

Théorème 8. *Soient* a, b *deux réels tel que* $a, \ b \in \overline{\mathbb{R}}$, φ *une bijection de classe* C^1 *de* $]a, b[$ *sur son image et* f *une fonction continue sur* $\varphi(]a, b[)$. *Alors, les intégrales* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} (f)(t)\,dt$ *et* $\int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ *sont de même nature et égales si elles convergent.*

4.3 Intégrales de fonctions positives

Dans cette partie nous donnons les principaux critères de comparaison adoptés pour l'étude de la nature dune intégrale généralisée. Pour la suite nous utiliserons que les fonctions positives. Pour les intégrales des fonctions négatives, il suffit de considérer la fonction $-f$ qui nous amène au cas des intégrales des fonctions positives.

Si f une fonction définie et positive sur $I = [a, +\infty[$, alors

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

est une fonction croissante sur I . Pour que φ ait une limite, il faut, et il suffit, que φ soit majorée. Donc, on a le théorème suivant.

Théorème 9. *Si f une fonction définie et positive sur $I = [a, +\infty[$ et intégrable dans tout intervalle compact $[a, x] \subset I$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$, existe si et seulement si $\int_a^x f(t)\, dt$ majorée sur I .e., $\exists M > 0$ tel que*

$$0 \leq \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leq M, \quad \forall x \in [a, +\infty[\,.$$

Et donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ (resp. $\int_a^b f(t)\, dt$) diverge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$ (resp. $\int_a^b f(t)\, dt = +\infty$).

Remarque 14. Le résultat rest valable pour $I = [a, b[$.

4.3.0.1 Règles de convergence (Critère de convergence)

Définition 12. On dit que deux intégrales sont de même nature si elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.

- **Condition nécessaire de convergence sur $I = [a, +\infty[$ ou $I = [a, b[$:**

Théorème 10. *Soit f une fonction localement intégrable sur $I = [a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$, converge et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$, existe, cette limite est nécessairement nulle.*

Corollaire 2. *L'itégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ converge si l'un des restes $\int_c^b f(t)\, dt$, $a < c < b$ converge.*

- **Comparaison de fonctions positives :**

Théorème 11. *Soit f et g localement intégrables et telles que $0 \leq f \leq g$ sur $I = [a, +\infty[$.*
(i) Si $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge aussi.
(ii) Si $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ diverge aussi.

Exemple 21. On considère l'intégrale suivante :

$$\int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Comme $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, $\forall t \geq 1$, on a $\forall c > a > 1$,

$$\int_c^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_c^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-c} < \infty.$$

Le reste $\int_c^{+\infty} e^{-t^2} dt$ de l'intégrale$\int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergent, d'où$\int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est converge.

• Équivalence de fonctions positives :

Théorème 12. *Soit f et g deux fonctions positives.*
(i) Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).
(iii) Si $f \underset{a}{\sim} g$, , alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Plus généralement on a la proposition suivante.

Proposition 9. *Soient $f,\ g\ :\ [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrable positives telles que*

$$\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = l \quad (l \in \mathbb{R}).$$

(i) Si $l \neq 0$ alors les deux intégrales et $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.
(ii) Si $l = 0$ ($f \underset{b}{=} o(g)$ i.e., f est négligeable devant g au voisinage de b), alors

(a) Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge aussi.
(b) Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge aussi.

Remarque 15. Il est important que f et g soient de même signe au voisinage du problème étudié, sinon les fonctions peuvent être équivalentes et leurs intégrales de nature différente.

Corollaire 3. (*i*) *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$ et positive. Sil existe $\alpha > 1$ tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = 0,$$

alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.
(*ii*) *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ et positive.*
S'il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\lim_{t \to b^-} (b-t)^{\alpha} f(t) = 0,$$

alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Remarque 16. • Situations de référence

(1) Pour $a > 0$, on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \textit{ converge} \iff \alpha > 1.$$

(2) Pour $a > 0$, on a (Intégrale de Riemann)

$$\int_0^{a} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \textit{ coverge} \iff \alpha < 1.$$

(3) L'intégrale

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt \textit{ converge}.$$

(4) Pour $a > 0$, on a

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ } converge \iff \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 31. Etudier la nature et calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt, \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}} dt, \quad 3) \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt, \quad 5) \int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$$

Solution : 1) Il y a deux problèmes, un en 0 et un autre en $+\infty$et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt = \int_0^{1} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt$$

Au voisinage de 0 : On a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} = 0,$$

la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable.
Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3}.$$

Puisque

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0,$$

alors, d'après les règles de Riemann $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0,\ \alpha > 1$ où $f(t) = \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}$ la fonction est intégrable. Donc, l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt,$$

converge.
Ainsi, l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt,$$

converge et on intègre par partie, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_\epsilon^x \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2}\times\frac{\ln(t)}{t^2+1}\right]_\epsilon^x + \frac{1}{2}\int_\epsilon^x \frac{1}{t(t^2+1)}dt\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2}\times\frac{\ln(t)}{t^2+1}\right]_\epsilon^x + \frac{1}{2}\int_\epsilon^x \left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{2}\times\frac{\ln(t)}{t^2+1}\right]_\epsilon^x + \frac{1}{2}\left[\ln(t)-\ln\left(t^2+1\right)\right]_\epsilon^x\right) = 0,$$

il n'y a plus de forme indéterminée compliquée, la limite est nulle.

$2^{ème}$ méthode : Il existe une bonne ruse pour cette intégrale, sachant que l'intégrale converge on peut faire le changement de variable

$$u = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u}\begin{cases} t\to 0^+ \Rightarrow u\to+\infty, \\ t\to+\infty \Rightarrow u\to 0^+, \end{cases}$$

d'où $dt = -\frac{1}{u^2}du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(u^2+1)^2}du.$$

Par suite, on remplace u par t ou bien t par u, on obtient pour le premier cas :

$$2\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} = 0.$$

2) La fonction $t\mapsto \frac{t}{t\sqrt{t^2+1}}$ est positive et on a

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Comme $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}$ est converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt,$$

converge et en faisant le changement de variable $u = t^2+1$, d'où $du = 2tdt$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_{2}^{x^2+1} \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}} du,$$

en faisant encore le changement de variable $v = \sqrt{u}$, d'où $dv = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{2}^{x^2+1} \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}} du = \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{v^2-1} dv$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{2(v-1)} - \frac{1}{2(v+1)} \right) dv$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} = 2 \ln \left(\sqrt{2} - 1 \right).$$

3) Puisque

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times t^3 e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0,$$

alors, d'après les règles de Riemann $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha} f(t) = 0,\ \alpha > 1$ où $f(t) = t^3 e^{-t}$ la fonction est intégrable. Donc, l'intégrale impropre

$$\int_{0}^{+\infty} t^3 e^{-t} dt,$$

converge et on a

$$\int_{1}^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} t^3 e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left[-x^3 - 3x^2 - 6x - 6 \right] e^{-x} + 6 \right) = 6.$$

4) Il y a deux problèmes, un en 0 et un autre en $+\infty$et on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt = \int_{0}^{1} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt$$

Au voisinage de 0 : On a

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{t^5}{\sqrt{t}} = t^{\frac{9}{2}},$$

d'où

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} = 0,$$

la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable. Donc $\int_0^1 \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt$ converge.
Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}},$$

il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = -\frac{1}{2} \leq 1$ i.e, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}}dt$ diverge, donc d'après le critère d'équivalence l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt$ diverge.
Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt,$$

diverge.
5) D'une manière simulaire.

Exercice 32. Etudier la nature

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt.$$

Solution : La fonction $f : t \longmapsto \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt.$$

1) Au voisinage de 0 : On a

$$f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ existe (converge), alors $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.
2) Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}-1\right) = t^{\frac{7}{6}}\left(\frac{1}{3t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

d'où

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^{\frac{7}{6}}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{7}{6}}}dt$ existe (converge), alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

4.4 Intégrale des fonctions de signe quelconque

4.4.1 Convergence absolue

Définition 13. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite absolument convergente si l'intégrale impropre$\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Proposition 10. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors, si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge aussi.*

Exemple 22. Lintégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right) dt,$$

est absolument convergente. En effet :

$$\left|e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right)\right| \leq e^{-t}.$$

Comme l'intégrale$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$, est convergente, alors l' intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right) dt,$$

est absolument convergente.

4.4.2 Critère d'Abel pour les intégrales de la forme $\int fg$

Proposition 11. *(Théorème d'Abel) Soient $f,\ g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrable.*

(i) Si f est monotone et $\lim\limits_{t \to b^-} f(t) = 0$.

(ii) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[\,,\ \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$.

Alors, l' intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ converge.

Exemple 23. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, est convergente. En effet :
D'une part, on a $f(t) = \frac{1}{t}$ est une fonction décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
D'autre part, on a

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ \left|\int_a^x \sin(t)\,dt\right| = |\cos(1) - \cos(x)| \leq 2.$$

Ainsi d'après le Théorème d'Abel, lintégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

4.4.2.1 Intégrale semi-convergente

Définition 14. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais nest pas absolument convergente.

Exemple 24. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge mais elle ne converge pas absolument. Donc elle est semi-convergente. En effet :
en utilisant le Théorème d'Abel (Proposition 11), il est clair que l'intégrale$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

Etude de la convergence absolue : Pour tout $t \geq 1$, on a

$$\frac{\sin^2(t)}{t} \leq \frac{|\sin(t)|}{t},$$

et

$$\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}.$$

D'après linéarité (Remarque 7), puisque l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge, alors et d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

4.5 Exercices corrigés

Exercice 33. Calculer les inégrales généralisées suivantes :

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx, \quad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \quad 3)\ \int_0^1 \ln(x)\,dx$$

$$4)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx, \quad 5)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx, \quad 6)\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$7)\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx, \quad 8)\ \int_a^{+\infty} \frac{1}{x(r+x)}dx, \quad a>0,\ r>0, \quad 9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx.$$

Solution : 1) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+e^t}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

2) $\forall c \in]0,+\infty[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{c} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\int_0^{c} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to0^+} 2e^{-\sqrt{t}} - \lim_{t\to+\infty} 2e^{-\sqrt{t}} = 2.$$

3) En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -1 - \lim_{t\to0^+}\left[t\ln(t) - t\right] = -1.$$

4) En intégrant par parties, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1\right] = 1.$$

5) En intégrant par parties puis en décomposant la fraction rationnelle obtenue en éléments simples, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx = \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(-\frac{\ln(t)}{1+t}\right) + \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(-\frac{\ln(t)}{1+t}\right) + \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x)}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(-\frac{\ln(t)}{1+t}\right) + \lim_{t\to0^+}\left(\ln(1+t) - \ln(t) - \ln(2)\right)$$

$$= -\ln(2) + \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t\ln(t)}{1+t} - \ln(1+t)\right] = -\ln(2).$$

6) En intégrant par parties, si $n \geq 1$, on obtient

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^{t} x^n e^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-t^n e^{-t} + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx\right), \quad car \lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = 0.$$

Donc, il en résulte que $I_n = nI_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et par récurrence, on obtient

$$I_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

7) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan^2(t)\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

8) On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, on obtient

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(r+x)}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{r}\int_a^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{a}{r+a}\right) + \ln\left(\frac{t}{r+t}\right)\right) = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{a}{a+r}\right).$$

9) $\forall c \in]0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx = \int_0^c \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx + \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_t^c \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx + \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\int_c^t \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$$

$$= -\lim_{t\to 0}\sqrt{\sin(2t)} + \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin(2t)} = 0.$$

Exercice 34. Montrer que les intégrales suivantes convergent :

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx, \quad 2)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\,dx, \quad 3)\ \int_0^1 e^{-x^2}dx, \quad 4)\ \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx.$$

Solution : 1) La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

a) Au voisinage de 0 : On a

$$f(t) \underset{0}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{t}}.$$

Par comparaison, on a

$$\frac{e^{-1}}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ existe (converge), alors $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx$ converge.
b) Au voisinage de $+\infty$: Par comparaison, on a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}} \leq e^{-x}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}dt$ existe (converge), alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{1+x+x^2}}dx$ converge.
2) On a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} \ln(1+\sin(x))\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} \int_t^1 \ln(1+\sin(x))\,dx + \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_1^t \ln(1+\sin(x))\,dx.$$

Cherchons un équivalent de $\ln(1+\sin(x))$ au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$. Posons $u = x+\frac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(x)) &= \ln(1-\cos(u))\\ &= \ln\left(\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)\right)\\ &= \ln u^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\\ &= \ln u^2 + \ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\\ &= \left(\ln u^2\right)\left(1+\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\ln\left(u^2\right)}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{u\to0}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\ln(u^2)}\right) = 0$, alors $1+\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\ln(u^2)} \underset{0}{\sim} 1$. Donc

$$\left(\ln u^2\right)\left(1+\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\ln\left(u^2\right)}\right) \underset{0}{\sim} 2\ln(u).$$

Ainsi

$$\ln(1+\sin(x)) = \left(\ln u^2\right)\left(1+\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\ln(u^2)}\right) \underset{0}{\sim} 2\ln(u) = 2\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

D'autre part, comme $\int_0^1 \ln(u)\,du$ converge, alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 \ln(1+\sin(x))\,dx$ converge (de même nature).
D'une manière similaire, on trouve, $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\,dx$ et $-\int_0^1 \ln(u)\,du$ de même nature (convergent).
3) $\forall x>1$, on a

$$x^2 > x \Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}.$$

D'où, par comparaison

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < \int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Donc, comme $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est converge, alors $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ l'est.
4) $\forall x>0$, on a

$$\frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}} \le \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x^3}} \le \frac{2}{\sqrt{x^3}}, \quad car\ \sin(x)\le 1.$$

d'où, par comparaison, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ de même nature (convergent).

Exercice 35. Déterminer pour quelles valeurs du couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. (On dessinera dans le plan l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels il y a convergence).

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx.$$

Solution : 1) Cherchons un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}.$$

Le résultat dépend du signe de β. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant : On pose $I=\int_0^1 g(x)\,dx$ et $J=\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$. On a

	$f \underset{0}{\sim} g$	$f \underset{+\infty}{\sim} g$	condition de convergence de I	condition de convergence de J
$\beta>0$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\alpha<1$	$\alpha+\beta>1$
$\beta=0$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\alpha<1$	$\alpha>1$
$\beta<0$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\alpha+\beta<1$	$\alpha>1$

L'ensemble des couples (α,β) pour lesquels l'intégrale $\int_0^\infty g(x)\,dx$ converge est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\alpha+\beta=1$ et $\alpha=1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\beta=0$.

b) Même méthode. Les équivalents dépendent du signe de α cette fois. Remarquons que si $\alpha > 0,\ x^\alpha \to 0,\ quand\ x \to 0$, donc $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^\alpha$, et si $\alpha < 0$, on peut écrire

$$\ln(1+x^\alpha) = \ln x^\alpha \left(\frac{1}{x^\alpha}+1\right)$$

$$= \ln(x^\alpha) + \ln x^\alpha \left(1+x^{-\alpha}\right)$$

$$= (\ln(x^\alpha))\left(1+\frac{\ln x^\alpha\left(1+x^{-\alpha}\right)}{\ln(x^\alpha)}\right).$$

Donc

$$(\ln(x^\alpha))\left(1+\frac{\ln x^\alpha\left(1+x^{-\alpha}\right)}{\ln(x^\alpha)}\right) \underset{0}{\sim} \alpha\ln(x).$$

On a des résultats invers´es en $+\infty$. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant : On pose $I = \int_0^1 g(x)\,dx$ et $J = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$. On a

	$f \underset{0}{\sim} g$	$f \underset{+\infty}{\sim} g$	condition de convergence de I	condition de convergence de J
$\alpha > 0$	$\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\alpha\frac{\ln(x)}{x^\beta}$	$\beta-\alpha<1$	$\beta>1$
$\alpha = 0$	$\frac{\ln(2)}{x^\beta}$	$\frac{\ln(2)}{x^\beta}$	$\beta<1$	$\beta>1$
$\alpha < 0$	$\alpha\frac{\ln(x)}{x^\beta}$	$\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\beta<1$	$\beta-\alpha>1$

L'ensemble des couples (α,β) pour lesquels l'intégrale $\int_0^\infty g(x)\,dx$ converge est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\beta-\alpha=1$ et $\beta=1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\alpha=0$.

3) L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$, et on

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx = \int_0^1 \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx + \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx.$$

a) Au voisinage de $+\infty$: Posons

$$f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}.$$

Si $\alpha = 0$, la fonction f est nulle et l'intégrale converge.
Si $\alpha \neq 0$, et si x tend vers l'infini, on écrit

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - 1\right),$$

et en faisant un développement limité en 0 par rapport à $\frac{1}{x}$, on obtient

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)$$

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha\left(\frac{\alpha}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{0}{\sim} \alpha x^{\alpha-1}.$$

Donc
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^{\beta-\alpha+1}}.$$
D'après le critère d'équivalence, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\beta-\alpha+1}}dx$ converge si est seulement si $\beta-\alpha > 0$ (Intégrale de Riemann), alors$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.
b) Au voisinage de 0 : Le résultat dépend du signe de α.
Si $\alpha < 0$ et puisque $(1 - x^{-\alpha}(1+x)^\alpha)$ tend vers 1, quand x tend vers 0, alors
$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = -x^\alpha\left(1 - x^{-\alpha}(1+x)^\alpha\right) \underset{0}{\sim} -x^\alpha,$$
d'où
$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$
Donc, d'après le critère d'équivalence, puisque $\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}dx$ converge si est seulement si $\beta-\alpha < 1$ (Intégrale de Riemann), alors$\int_0^1 \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx$ converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.
Si $\alpha > 0$, la quantité $(1+x)^\alpha - x^\alpha$ tend vers 1 en 0, donc
$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\beta}.$$
Donc, d'après le critère d'équivalence, puisque $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}dx$ converge si est seulement si $\beta < 1$ (Intégrale de Riemann), alors $\int_0^1 \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}dx$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

Exercice 36. Soit
$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx.$$
Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel λ et calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

Solution : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x > 0$, on a
$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$
Donc, d'après le critère de comparaison l'nitégrale $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+x^\lambda\right)}dx$ converge car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge.
En posant $t = \frac{1}{x}$, on a $x = \frac{1}{t}$ donc $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, et l'on obtient
$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}dt.$$
Alors, en additionnant, puisque toutes les intégrales convergent,
$$2I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\mu)}dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 37. .Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \sin(x)\, dx, \quad 2) \int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx, \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} dx, \ 4) \int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx$$

$$5) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2} dx, \quad 6) \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{x} dx, \quad 7) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x} dx \ 8) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}} dx, \quad 9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx,$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx, \quad 11) \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx, \quad 12) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x} dx, \ 13) \int_{-1}^{7} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.$$

Solution : 1) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} (1-\cos(x)) \ \textit{n'existe pas},$$

cette limite prend plus d'une valeur, et donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin(x)\, dx$ diverge.
2) En faisant le changement du variable $u = x^2$, d'où $du = 2xdx$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du.$$

En appliquant le Théorème d'Abel (Théorème 6) à l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du.$$

Comme la fonction $u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}} = 0$ et

$$\forall x \in [1,+\infty[, \ \left| \int_1^{+\infty} \sin(u)\, du \right| \le 2.$$

Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du,$$

converge, ainsi l'intégrale impropre

$$\int_{1}^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx,$$

converge, par suite l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx$, converge car la fonction est Riemann intégrable sur $[0, 1]$.
3) On sait que $\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$ et comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge, alors d'après le ceritère d'équivalence l'intégrale impropre

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} dx,$$

converge, ainsi l'intégrale impropre

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} dx,$$

converge car la fonction $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}$ est continue sur $[0, 1]$.
4) On a

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \lim_{x \to -1} \int_{x}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} dt,$$

En faisant le changement du variable $u = t + 1$, d'où $du = dt$, on trouve

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \lim_{x \to -1} \int_{x}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} dt,$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_{t}^{8} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du$ converge, alors $\int_0^8 \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du + \int_1^8 \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du$ converge. Ainsi l'intégrale impropre

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx,$$

converge.
5) D'une part, on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos\left(x^2\right)}{1+x^2} dx = \int_{0}^{1} \frac{\cos\left(x^2\right)}{1+x^2} dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos\left(x^2\right)}{1+x^2} dx.$$

D'autre part, on va étudier la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}dx.$$

On a

$$\left|\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

et

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

D'où, comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, alors d'après le critère de comparaison, l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}\right| dx,$$

converge.
Ainsi l'intégrale

$$\int_0^{1} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}dx,$$

converge, puisque la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.
6) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(x) \geq -1 &\Longrightarrow e^{\sin(x)} \geq e^{-1} \\ &\Longrightarrow \frac{e^{\sin(x)}}{x} \geq \frac{e^{-1}}{x}. \end{aligned}$$

Comme lintégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, alors daprès le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{x}dx,$$

diverge.
7) Pour tout $x \geq e$, on a

$$\frac{\ln(x)}{1+x} \geq \frac{1}{1+x},$$

et

$$\frac{1}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, alors d'après le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale impropre

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x}dx,$$

diverge.
8) L'intégrale$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ est doublement impropre, alors on doit la décomposer en deux integrales impropres, $\forall c \in \left]1, +\infty\right[$, prend $c = 1$ on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx = \int_{0}^{1} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx.$$

Au voisinage de 0, il est clair que la fonction $x \mapsto \sin(5x) - \sin(3x)$ admet un dévellopement limité à lordre 1,

$$\sin(5x) - \sin(3x) = 2x + o(x).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} = 2.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ est convergente alors l'intégrale impropre$\int_0^1 \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ est convergente.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\left|\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}\right| \leq \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

d'où, comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ converge, alors l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ est convergente, et par conséquent l'intégrale impropre

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx,$$

converge.
9) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3-x^2}{x^6+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx.$$

Il est clair que les deux intégrales $-\int_0^{+\infty} \frac{x^3-x^2}{x^6+1}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$ sont impropres au voisinage de $+\infty$.
Comme

$$\frac{x^3-x^2}{x^6+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^6} \quad et \quad \frac{x^3+x^2}{x^6+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^6},$$

et l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6} dx$ converge, alors les deux intégrales impropre $-\int_0^{+\infty} \frac{x^3-x^2}{x^6+1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx$ sont convergentes, et par conséquent l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx,$$

converge.

10) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Il est clair que $x \mapsto \cos(t)$ est une fonction positive au voisinage de 0, de plus

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos(x)}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ est divergente alors l'intégrale impropre$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ est divergente, et par conséquent (Théorème 5), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx,$$

est divergente.

11) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx.$$

a) Il est clair qu au voisinage de 0, on a

$$1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Or la fonction constante $x \to \frac{1}{2}$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$, alors $\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est convergente.

b) Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\left| \frac{1-\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente alors l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$ est absolument convergente, et par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$, est converge. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx,$$

convergente.
12) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x+e^x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx.$$

a) Au voisinage de 0 : On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\ln(x)}{x+e^x}}{-\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+e^x}dx = 1.$$

Et d'après l'intégration par partie on a

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{x\to 0}(x\ln(x) - x - 1) = -1,$$

converge, donc l'intégrale impropre $-\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x+e^x}dx$ converge.
b) Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x+e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(2)+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)} \times \frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente alors l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx$ est convergente, et par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx$, est convergente.
13) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx.$$

Au voisinage de 0 : On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})}{x^2-1} = 0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergente alors l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ est convergente.
a) Au voisinage de 1 : On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Comme les deux intégrales impropre $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x+1}dx$ et $\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$ sont convergentes (existent), alors l'intégrale impropre $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ et $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ sont convergentes (voir Theorème 12).

b) Au voisinage de $+\infty$: On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente alors l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ est convergente (voir Proposition 9).
Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ converge.

Exercice 38. Calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos(x)}dx,\quad 2)\ \int_a^{b}\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx \text{ où } a<b.$$

Solution : 1) Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos(x)}dx$. En faisant le changement de variables, $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ d'où $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ et on a : $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Donc, l'intégrale devient

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^{+\infty}dt=+\infty.$$

2) La forme canonique de $(x-a)(b-x)$ est

$$\begin{aligned}(x-a)(b-x)&=-x^2+(a+b)x-ab\\&=-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a^2+b^2-2ab}{4}\\&=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{2}{b-a}x\right)+\frac{b+a}{b-a}\right].\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\frac{2}{b-a}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{a+b}{a-b}\right)^2}}.$$

Et d'après le changement du variable $u=1-\left(\frac{2}{b-a}x-\frac{a+b}{a-b}\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx&=\lim_{x\to-1}\int_x^0\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du+\lim_{x\to1}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du\\&=\lim_{x\to-1}(-\arcsin(x))+\lim_{x\to1}\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\end{aligned}$$

Exercice 39. 1. Étudier pour $\alpha>0$, la convergence et la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}dx.$$

.

2. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{[\ln(1+x)]^\beta} dx.$$

3. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β la nature de l'intégrale (Intégrale de Bertrand)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha [\ln(x)]^\beta} dx.$$

N. B : On laisse le lecteure le soin de résoudre l'exercice.

Bibliographie

[1] K. Allab, Analyse II, Rappels de cours et exercices avec solutions, Entreprise Nationale du Livre. Alger. 1990.

[3] Mohammed Aassila, 400 Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours, ellipses- paris 2014 ; ISBN : 9782340-002029, Collection Références science.

[4] Antoine Rauzy, Mathématique, Cours d'analyse : licence L1 et L2 1re et 2e année d'université, ESKA 2004 ; ISBN : 2-7472-0724-2.

[5] C. Baba-Hamed et K. Benhabib, Rappels de cours et exercices avec solutions, O. P. U. Alger 1998.

[6] François Bayen et Johann Yebbou, Mathématiques supérieurs. Analyse 2, Exercices corrigés, Conseils Précis de cours, Vuibert- paris 1994 ; ISBN : 2-7117-2097-7.

[7] François Liret et Dominique Martinais, Analyse 2, Cours et exercices avec solutions, Dunod- paris 2004 ; ISBN : 210 0048330 7.

[6] B. P. Démidovitch, Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, Edition Naouka (en Russe), 1990.