

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research



Polycopié pédagogique

Présenté par : Noureddine BOUTERAA

Intitulé du Polycopié

Analyse II

Rappels de cours et exercices corrigés

Destiné aux étudiants de la 2^{ème} Année

Classes préparatoires / Premier cycle

Table des matières

Remerciements	1
Table des matières	3
Remerciements	5
A propos de l’auteur	6
Avant-propos	7
Introduction	8
1 Séries numériques	9
1.1 Généralités	9
1.2 Critères généraux de convergence	11
1.3 Opérations sur les séries	13
1.4 Séries à termes positifs	14
1.4.1 Critères de comparaison	15
1.5 Séries à termes quelconques	27
1.5.1 Séries alternées	27
1.5.2 Critère d’Abel pour les séries de la forme $\sum_n u_n v_n$	27
1.5.3 Série absolument convergente	28
1.6 Produit des séries	31
1.7 Exercices corrigés	31
2 Equations différentielles ordinaires	50
2.1 Préliminaires et vocabulaire	50
2.2 Equations différentielles linéaires d’ordre n :	51
2.2.1 Equation différentielle linéaires d’ordre 1 :	51
2.2.1.1 Forme de l’équation :	51
2.2.1.2 Résolution de l’équation sans second membre	51
2.2.1.3 Résolution de l’équation avec second membre	52
2.2.1.4 Quelques types d’équations différentielles du premier ordre :	53
2.2.2 Exercices corrigés	60
2.2.3 Equation différentielle linéaires d’ordre 2 à coefficients constants :	75
2.2.3.1 Forme de l’équation :	75

2.2.3.2	Résolution de l'équation sans second membre	75
2.2.3.3	Résolution de l'équation avec second membre	76
2.2.4	Exercices corrigés	79
Index		94
Index		94
		94
Bibliographie		95

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon professeur et mon encadreur Monsieur Belaïcha Slimane, pour ses conseils et ses encouragements pour préparer ce polycopié m'ont beaucoup aidé à progresser.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont donné une partie de leur savoir au niveau de l'Ecole Supérieure d'Economie d'Oran et en particulier mes collègues qui m'ont toujours aidé scientifiquement. Je ne saurais oublier mes parents, mes frères, mes sœurs et ma famille. Merci pour votre patience.

A propos de l'auteur

Nouredine BOUTERAA est mathématicien, d'octeur en mathématique et membre du Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Appliquées d'Oran (LMFAO), Université Oran1, Ahmed Benbella, Algérie, maître de conférence de classe A en Mathématiques, actuellement chargé de cours en module « Analyse Mathématique », c'est le raison de préparer trois polycopiés en « Analyse Mathématique-I- et II ». Il enseigne depuis plusieurs années au sein de l'Ecole Supérieure d'Economie d'Oran. Il assure également chargé TD en module « Probabilités et statistiques », ainsi chargé de cours et chargé TD en module « Analyse Numérique I et II » au différents universités où il assure l'encadrements de cinq étudiants en mémoire de fin d'étude en Master Mathématique.

Il est l'auteur de plusieurs travaux scientifiques publiés dans différentes revues internationales. Chercheur sur les questions de l'existence, nonexistence, multiplicité, unicité et stabilité dans divers domaines d'analyse non linéaire (problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles non linéaires ordinaires, aux dérivées partielles et fractionnaires, inclusions et stochastiques). Il est aussi édité plusieurs rapports d'expertise d'articles scientifiques déposés (soumis) dans les revues scientifiques.

Avant-Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la deuxième année d'Ecole Supérieure d'Economie et, en particulier, de sciences économiques. Il peut être utile aux étudiants de licence voulant approfondir ce qu'ils ont appris dans ce cycle, en vue de se préparer au cycle suivant.

D'après mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module.

Ce polycopié traite une partie importante d'Analyse Mathématiques est conforme aux programme officiel et au syllabus du module d'Analyse Mathématique II pour les Ecoles Supérieure d'Economie et complète les deux polycopiés d'analyse I et II intitulés : " Analyse mathématique I : Cours et exercices" et " Résumé de cours et exercices résolus". Il contient l'essentiel du cours avec des exemples illustrant les définitions et aidant la compréhension des conditions d'applications des théorèmes et des propositions. A l'intérieur de chaque chapitre, chacune des subdivisions est précédée d'un rappel de l'essentiel de la partie correspondante. Des exercices d'applications sont proposés avec des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux. La rédaction des solutions a été faite avec le plus grand soin, le souci principal étant de familiariser l'étudiant avec le raisonnement mathématique et de lui apprendre surtout à rédiger.

Vu le programme proposé par le ministère, j'ai partagé ce modeste travail en deux parties essentielles. La première partie contient le chapitre de séries numériques et la deuxième comporte le chapitre des équations différentielles, lesquelles sont devenues indispensables dans l'étude des systèmes dynamiques en économie. On sait que la macroéconomie servant de cadre aux politiques économiques (conjoncturelles) est devenue dynamique, depuis les travaux des économistes du cycle réel des affaires (Finn E. Kydland et Edward C. Prescott, entre autres) au début des années 1980.

Nous espérons que la pratique de ce polycopié aidera les étudiants à assimiler plus rapidement les notions et les méthodes introduit au cours et aussi constituera un support utile pour nos étudiants et les aidera à améliorer leurs résultats aux examens. Il peut aussi alléger la tâche des enseignants de mathématiques.

Nos plus grands remerciements s'adresser à tout ceux et celles qui ont contribué à la formation des étudiants au Ecole Supérieure d'Economie.

Enfin, c'est avec reconnaissance que nous accueillerons les critiques et les suggestions que voudront bien nous faire parvenir les utilisateurs de ce polycopié.

Notation

Dans ce polycopié, les notations suivantes sont utilisées.

Symboles logiques et mathématiques :

$\in$ appartenance, $x \in A$ i.e., x appartient à A .

$\subset$ inclusion,

$\leq, \geq$ inégalités larges, $x \leq y$, se lit x est inférieur ou égal à y . $x \geq y$ se lit x est supérieur ou égal à y .

$<, >$ inégalités strictes, $x < y$ se lit x est strictement inférieur à y . $x > y$ se lit x est strictement supérieur à y .

$\Rightarrow$ implication, $p \Rightarrow q$ se lit p implique q .

$\Longleftrightarrow$ équivalence, $p \Longleftrightarrow q$ se lit p est équivalente à q . (condition nécessaire et suffisante).

∞ infini.

$f = o_{x_0}(g)$, se lit f est négligeable à g et o se lit "petit o ".

$f = O_{x_0}(g)$, se lit f est négligeable à g et O se lit "grand O ".

$f \sim_{x_0} g$, se lit f est équivalente à g .

Alphabet grec :

α alpha.

β bêta.

γ gamma.

δ, Δ delta.

ϵ epsilon.

λ lambda.

θ tête.

$\sum$ sigma.

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Généralités

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

(i) L'expression $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n \geq 0} u_n$ est appelée une série numérique de terme général u_n et l'on note $\sum_n u_n$.

(ii) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum_n u_n$.

Définition 2. On dit que la série $\sum_n u_n$ converge (resp. diverge), si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). Si la série $\sum_n u_n$ converge, la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$ est appelée la somme de la série $\sum_n u_n$.

Exemple 1. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. En effet, Si $q = 1$, la suite partielle est

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1) \text{ fois}} = n+1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty.$$

Donc, la suite partielle est divergente. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} q^n$, si $q = 1$ est divergente

Si $q \neq 1$, la suite partielle est

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{avec } |q| < 1,$$

Donc, la suite partielle est convergente ($(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie). On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, si $|q| < 1$ est convergente

Par suite, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, si $|q| < 1$.

Exemple 2. On va calculer la la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. On a

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + \cdots + u_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right) = 1.$$

Par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

.

Exemple 3. On va calculer la la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) \\ &= \ln(n^2 - 1) - 2 \ln(n) \\ &= \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2 \ln(2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_2 + \cdots + u_n \\ &= (\ln(3) - 2 \ln(2)) + (\ln(2) + 2 \ln(2) - 2 \ln(3)) + \cdots + (\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2 \ln(n)) \\ &= -\ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1)) = -\ln(2).$$

Par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln(2).$$

On en déduit que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge.

Exemple 4. On va calculer la la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_2 + \dots + u_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge.

1.2 Critères généraux de convergence

Définition 3. (Critère de Cauchy). Une série numérique $\sum_n u_n$ est dite de Cauchy si sa suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est de Cauchy i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p \geq n_\varepsilon, q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p, m) \in \mathbb{N}^2 (p \geq n_\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=p+1}^{k=p+m} u_k \right| < \varepsilon.$$

Exemple 5. La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ n'est pas de Cauchy (et par conséquent n'est pas convergente). En effet, la suite partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy (et par conséquent n'est pas convergente) i.e.,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p > q \geq n) \text{ et } |S_p - S_q| \geq \varepsilon.$$

Pour $p = 2n$, $q = n$, on a

$$|S_p - S_q| = |S_{2n} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \geq n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2},$$

donc il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Proposition 1. Soit la série numérique $\sum_n u_n$.

Si la série numérique $\sum_n u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration. si $\sum_n u_n$ converge, alors la suite partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite S .

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

□

Remarque 1. (i) Par contraposé on déduit que si le terme général d'une série $\sum_n u_n$ ne tend pas vers 0, alors la série est divergente.

(ii) La réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet (Contre exemple), la série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ diverge. Mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemple 6. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{2n+5}$ diverge. En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{2n+5} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{2n+5}$ diverge.

Exemple 7. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{n} \right) = 1 \neq 0,$$

alors, la série $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\frac{1}{n} \right)$ diverge.

1.3 Opérations sur les séries

Définition 4. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques, et soit λ un réel.

- (i) La série $\sum_n (u_n + v_n)$ est appelée, la série somme des deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$
- (ii) La série $\sum_n \lambda u_n$ est appelée, la série produit de la série $\sum_n u_n$ par le scalaire λ .

Remarque 2. L'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques.

- (i) Si $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n (u_n + v_n)$ converge.
- (ii) Si $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ diverge, alors la série $\sum_n (u_n + v_n)$ diverge.
- (iii) Si $\sum_n u_n$ diverge et $\sum_n v_n$ diverge, alors on ne peut rien conclure pour la nature de la série de la série $\sum_n (u_n + v_n)$.

Démonstration. La démonstration de (i) et (ii) sont évidentes. On va montrer (iii) :

- 1) Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques telles que

$$u_n = 1 \text{ et } v_n = -1.$$

Il est clair que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont divergentes. Mais, la série $\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n 0$ est convergente.

- 2) Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques telles que

$$u_n = n \text{ et } v_n = \frac{1}{n}.$$

Il est clair que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont divergentes. Mais, la série $\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergente (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$). $\square$

Définition 5. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique et $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{k \geq n} u_k = R_n$ est appelée le reste d'ordre n de la série $\sum_n u_n$.

Proposition 3. La série $\sum_n u_n$ converge, si et seulement si la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 3. (i) Si les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les deux séries sont de même nature. En cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

(ii) On ne change pas la nature d'une série $\sum_n u_n$ si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

(iii) La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

1.4 Séries à termes positifs

Définition 6. La série $\sum_n u_n$ est dite à termes positifs si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.$$

Remarquons que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc on a

Proposition 4. Une série à termes positifs $\sum_n u_n$ converge si et seulement si sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

De plus, dans ce cas, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

On note aussi $\sum_n u_n < +\infty$ pour dire que la série $\sum_n u_n$ converge.

Démonstration. Implication indirect : Il est clair que la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

est croissante, alors si S_n majorée, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ainsi la série $\sum_n u_n$ converge. □

Implication direct :

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ converge}$$

$$\Rightarrow (S_n)_n \text{ bornée}$$

$$\Rightarrow (S_n)_n \text{ majorée.}$$

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels positifs. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Donc, la série $\sum_n u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On écrit alors dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = +\infty.$$

1.4.1 Critères de comparaison

1) Convergence par comparaison directe :

Théorème 1. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n,$$

alors

(i) si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge,

(ii) si la série $\sum_n u_n$ diverge, alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. (i) Si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la suite de somme partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par certain $M > 0$. Donc la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n v_k\right)_n$ est majorée par $M > 0$. Doù, on a

$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^n u_k \leq u_0 + u_1 + \cdots + u_{n_0-1} + M,$$

c'est-à-dire la suite des termes positifs $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par $M_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n_0-1} + M$. Par conséquent, la série $\sum_n u_n$ converge.

(ii) Par contraposé de (i). □

Exemple 8. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$ est convergente, alors la série $\sum_n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$ est convergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \leq \frac{1}{3^n}.$$

Exemple 9. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^4}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + \cos(n)}{n^4}$ est convergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \frac{1 + \cos(n)}{n^4} \leq \frac{2}{n^4}.$$

Exemple 10. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Corollaire 1. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que

$$u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n),$$

alors

(i) si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge,

(ii) si la série $\sum_n u_n$ diverge, alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. On a

$$u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq Mv_n,$$

d'où, d'après le Théorème 1 que les deux assertions sont vérifiées. $\square$

Corollaire 2. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \quad l \in \mathbb{R}_+.$$

Si $l = 0$, i.e., $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors

(i) si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge,

(ii) si la série $\sum_n u_n$ diverge, alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Si $l \neq 0$, alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature. En particulier pour $l = 1$ i.e., $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démonstration. (i) On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < \epsilon.$$

Pour $\epsilon = 1$, $\exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n$. Donc, d'après le Théorème 1 que les deux assertions sont vérifiées.

(ii) On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \epsilon.$$

Pour $\epsilon = \alpha < l$, $\exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow l - \alpha \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \alpha$, d'où, on a d'une part

$$u_n \leq (l + \alpha) v_n,$$

donc, d'après le Théorème 1 que l'assertion (i) est vérifié.

D'autre part

$$u_n \geq (l - \alpha) v_n,$$

donc, d'après le Théorème 1 que l'assertion (ii) est vérifié.

Par suite, les deux séries sont de même nature. $\square$

Exemple 11. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \text{ et } v_n = \frac{2}{3^n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}{\frac{2}{3^n}} = \frac{1}{2}.$$

Comme $\sum_n v_n$ est convergente, alors $\sum_n u_n$ l'est aussi.

Exemple 12. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ est convergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0, \text{ i.e., } u_n = e^{-\sqrt{n}} = o_{+\infty} \left(v_n = \frac{1}{n^2} \right).$$

Exemple 13. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}$ est convergente alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n}}{(1+n)\sqrt{n}}$ est convergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{(1+n)\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} = 1, \text{ car } \sqrt[3]{n} \sim_{+\infty} \sqrt[3]{n} \text{ et } (1+n)\sqrt{n} \sim_{+\infty} n^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exemple 14. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente alors la série $\sum_{n \geq 1} \arctan \left[\frac{1}{(1+\ln(n))\sqrt{n}} \right]$ est divergente. En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\arctan \left[\frac{1}{(1+\ln(n))\sqrt{n}} \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(1+\ln(n))\sqrt{n}}}, \text{ car } \arctan \left[\frac{1}{(1+\ln(n))\sqrt{n}} \right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1+\ln(n))\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

2) Critère d'intégrale :

Proposition 5. Soit $f : [1, +\infty[$ une fonction continue et décroissante. Alors La série $\sum_n f(n)$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge (i.e., $\int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty$).

Démonstration. Posons $f(n) = u_n$. Comme f est décroissante, alors pour $n \geq 2$, on a

$$f(t) \leq f(n) = u_n, \quad \forall t \in [n, n+1],$$

et

$$u_n = f(n) \leq f(t), \quad \forall t \in [n-1, n].$$

D'où

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} u_n dt = u_n,$$

et

$$u_n = \int_{n-1}^n u_n dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Par suite

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Supposons $v_n \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$. Alors, pour $n \geq 2$:

$$v_{n+1} \leq u_n \leq v_n.$$

Ainsi les séries de terme généraux u_n et v_n sont de même nature.

Comme

$$\sum_{k=1}^n v_k = \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t) dt = \int_1^n f(t) dt,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt,$$

c'est-à-dire la série $\sum_n v_n$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature, et par suite la série $\sum_n u_n$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature. $\square$

Exemple 15. (Série de Riemann). Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Il est facile de voir que la fonction est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. On a

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$: la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelé série harmonique. En utilisant le Critère de Cauchy on peut démontré que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Conclusion : (i) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ de Riemann converge si et seulement si $\alpha \leq 1$.

Remarque 4. Pour $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$.

3) Convergence par comparaison avec série de Riemann :

Proposition 6. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

- (i) Pour $\alpha > 1$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
(ii) Pour $\alpha \leq 1$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha u_n} = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Démonstration. Découlant immédiatement du Corollaire 2. □

Proposition 7. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels positifs.

- (i) S'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = l$, i.e., $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$, alors
(ii) Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
(ii) Pour $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Démonstration. Découlant immédiatement du Corollaire 2. □

Exemple 16. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi^2}{n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n \geq 1} \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est convergente.

En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right)^2 = 1, \text{ i.e., } u_n = \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(v_n = \frac{\pi^2}{n^2} \right).$$

Exemple 17. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente alors la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

En effet, les deux séries sont des termes positifs et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1, \text{ i.e., } u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

4) Convergence par comparaison logarithmique :

Proposition 8. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que, $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors

- (i) si la série $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge,
(ii) si la série $\sum_n u_n$ diverge, alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n},$$

c'est-à-dire $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est décroissante à partir du rang n_0 . Donc,

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_0}{v_0}, \quad \forall n \geq n_0.$$

et par conséquent d'après le Théorème 1, on trouve le résultat. $\square$

Exemple 18. On va étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{5^n}$ en utilisant la règle de comparaison logarithmique avec la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{5^n}$. On pose $u_n = \frac{n+3}{5^n}$ et $\frac{1}{5^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque $\frac{n+4}{5(n+3)} \leq \frac{n+4}{5(n+4)} = \frac{1}{5}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+4}{5(n+3)} \leq \frac{1}{5} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

D'où, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{5^n}$ est convergente car $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{5^n}$ l'est. ($\sum_{n \geq 0} \frac{1}{5^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{5} < 1$).

5) Critère de d'Alembert :

Proposition 9. (*Règle de d'Alembert*). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

(i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

(ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que, $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$, alors $\sum_n u_n$ converge.

Démonstration. Il est immédiat car u_n ne tend pas vers 0 : En effet : Pour $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n,$$

c'est-à-dire à partir du rang n_0 la suite $(u_n)_n$ est croissante. Ainsi

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0} > 0,$$

par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq u_{n_0} > 0.$$

Donc, la série $\sum_n u_n$ diverge.

(ii) Il suffit de prendre $v_n = \alpha^n$ et appliquer la Proposition 7. $\square$

Corollaire 3. (Critère de d'Alembert usuel (1768)). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs tel que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

(i) Si $\alpha < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.

(i) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

(i) Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum_n u_n$.

Démonstration. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \alpha - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha + \epsilon.$$

(i) Pour $\alpha < 1$, il est clair qu'il existe ϵ_0 tel que $\alpha + \epsilon_0 < 1$ (par exemple $\epsilon_0 = \frac{1-\alpha}{2}$). Donc,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha + \epsilon_0 < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ converge.

(i) Pour $\alpha < 1$, il est clair qu'il existe ϵ_1 tel que $\alpha - \epsilon_1 > 1$ (par exemple $\epsilon_0 = \frac{\alpha-1}{2}$). Donc,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha - \epsilon_1 > 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ diverge.

(iii) Pour $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série divergente $\sum_n \frac{1}{n}$ et la série convergente $\sum_n \frac{1}{n^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+n}{n} = 1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(1+n)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+n)^2}{n^2} = 1.$$

□

Exemple 19. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(1+n)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+n)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+n)n!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1} < 1.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Exemple 20. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{n!3^n}$ de termes réels positifs.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)(2n+1)}{(n+1)!3^{n+1}} \times \frac{n!3^n}{1.3.5.7 \dots (2n-1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{n!3^n}$ converge.

6) Règle de Cauchy :

Proposition 10. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels positifs.

- (i) S'il existe $M \in]0, 1[$ tel que, $\sqrt[n]{u_n} \leq M$, pour n assez grand, alors $\sum_n u_n$ converge.
- (ii) Si $\alpha \geq 1$ tels que, $\sqrt[n]{u_n} \geq \alpha$, pour n assez grand, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Démonstration. (i) Comme la fonction $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\sqrt[n]{u_n} \leq M \Rightarrow u_n \leq M^n.$$

Or $\sum_n M^n$, $M \in]0, 1[$ étant une série géométrique convergente. Donc, d'après le Théorème 1, la série $\sum_n u_n$ converge.

(i) Comme la fonction $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\sqrt[n]{u_n} > 1 \Rightarrow u_n > 1.$$

d'où, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 1$. Donc, la série $\sum_n u_n$ diverge. □

Corollaire 4. (Règle de Cauchy usuelle (1821)). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels positifs.

On pose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \alpha.$$

- (i) Si $\alpha < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
 (i) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.
 (i) Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum_n u_n$.

Démonstration. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{u_n} - \alpha| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \alpha - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < \alpha + \epsilon.$$

(i) Pour $\alpha < 1$, il est clair qu'il existe ϵ_0 tel que $0 < \alpha + \epsilon_0 < 1$ (par exemple $\epsilon_0 = \frac{1-\alpha}{2}$).
 Donc,

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha + \epsilon_0 < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ converge.

(i) Pour $\alpha > 1$, il est clair qu'il existe ϵ_1 tel que $\alpha - \epsilon_1 > 1$ (par exemple $\epsilon_1 = \frac{\alpha-1}{2}$). Donc,

$$\sqrt[n]{u_n} > \alpha - \epsilon_1 > 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ diverge.

(iii) Pour $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série divergente $\sum_n \frac{1}{n}$ et la série convergente $\sum_n \frac{1}{n^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(\frac{1}{n})} = 1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n^2} \ln(\frac{1}{n})} = 1.$$

Or la première série est divergente et la deuxième série est convergente. □

Exemple 21. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ de termes réels positifs. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ est convergente.

Exemple 22. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, $a > 0$, $p > 0$ de termes réels positifs. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{1}{n^p} \right) = a.$$

Donc, si $a < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \left(a + \frac{1}{n^p} \right)^n$, $a > 0$, $p > 0$ est convergente et si $a > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \left(a + \frac{1}{n^p} \right)^n$, $a > 0$, $p > 0$ divergente.

Si $a = 1$, on ne peut rien conclure en utilisant la règle de Cauchy.

6) Critères de Raabe et Duhamel :

Proposition 11. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

- (i) Si $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \lambda < 1$, pour n assez grand, alors $\sum_n u_n$ converge.
- (ii) Si $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \lambda < 1$, pour n assez grand, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Proposition 12. (Critère de Raabe (1832)). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \alpha.$$

- (i) Si $\alpha < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- (i) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.
- (i) Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum_n u_n$.

Démonstration. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \left| n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - \alpha \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\epsilon \Rightarrow \alpha - \epsilon < n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < \alpha + \epsilon.$$

- (i) Pour $\alpha < 1$, il est clair qu'il existe ϵ_0 tel que $0 < \alpha + \epsilon_0 < 1$ (par exemple $\epsilon_0 = \frac{1-\alpha}{2}$).

Donc, $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < \alpha + \epsilon_0 < 1$, $\forall n \geq n_0$.

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ converge.

- (i) Pour $\alpha > 1$, il est clair qu'il existe ϵ_1 tel que $\alpha - \epsilon_1 > 1$ (par exemple $\epsilon_1 = \frac{\alpha-1}{2}$). Donc, $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > \alpha - \epsilon_1 > 1$, $\forall n \geq n_0$.

Ainsi d'après la proposition précédente, la série $\sum_n u_n$ diverge.

- (iii) Pour $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série divergente $\sum_n \frac{1}{n}$

et la série convergente $\sum_n \frac{1}{n \ln^2(n)}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n} \right) = 1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = 1.$$

□

Corollaire 5. (*Critère de Duhamel usuel (1839)*). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On pose

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

- (i) Si $\alpha < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- (i) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.
- (i) Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum_n u_n$.

Exemple 23. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$ de termes réels positifs. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{n!e^n}{n^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = ee^{-1} = 1. \end{aligned}$$

On applique le Critère de Duhamel, par le développement, on a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= ee^{(n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$ est divergente.

Corollaire 6. (*Critère de Gauss usuel (1812)*). Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On pose

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times]1, +\infty[: \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Alors,

$$\exists k \in \mathbb{R}_*^+, u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}.$$

Par conséquent :

(i) Si $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

(i) Si $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.

Exemple 24. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ de termes réels positifs.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\prod_{k=1}^{n+1} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1} 2k} \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k} \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k} \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k-1)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1. \end{aligned}$$

D'après ce que précède, on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ainsi d'après la proposition précédente, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est divergente.

1.5 Séries à termes quelconques

1.5.1 Séries alternées

Corollaire 7. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes quelconques. La série $\sum_n u_n$ est dite alternée si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+1} < 0$.

Remarque 5. Toute série alternée peut être écrite sous la forme $\sum_n (-1)^n u_n$ où u_n est de signe constant.

Théorème 2. (Théorème de Leibniz (1682)). Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée, si $(u_n)_n$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow 0} u_n = 0$, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus sa somme S est toujours comprise entre deux termes consécutifs S_{n+1} et S_n de la suite de ses sommes partielles.

Le reste :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

est du signe de u_{n+1} et vérifié $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 25. La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ est alternée et vérifie les hypothèses du théorème précédent, et donc elle converge. Elle est dite série de Riemann alternée.

1.5.2 Critère d'Abel pour les séries de la forme $\sum_n u_n v_n$

Théorème 3. (Critère d'Abel (1826)). Soit la série $\sum_n u_n v_n$ tel que

(i) La suite $(v_n)_n$ décroissante et converge vers 0,

(ii) $\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M$.

Alors, la série $\sum_n u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k v_k$. Soient $\epsilon > 0$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} |T_{p+q} - T_p| &= \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} (S_k - S_{k-1}) v_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1} v_k \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p}^{p+q-1} S_k v_{k+1} \right| \\
&= \left| \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_k + S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_{k+1} \right| \\
&= \left| S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k (v_k + v_{k+1}) \right| \\
&= |S_{p+q}| |v_{p+q}| + |S_p| |v_{p+1}| + \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |S_k| |v_k + v_{k+1}| \\
&= M |v_{p+q}| + m |v_{p+1}| + M \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |v_k + v_{k+1}|.
\end{aligned}$$

Comme la suite $(v_n)_n$ est décroissante, alors

$$|T_{p+q} - T_p| = M v_{p+q} + M v_{p+1} + M (v_p + v_{p+1}),$$

et comme la suite $(v_n)_n$ converge vers 0, alors $\exists N_\epsilon > 0$, $\forall n \geq N_\epsilon$, et on a

$$v_n \leq \frac{\epsilon}{2M}.$$

Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}^* : (p \geq N_\epsilon \Rightarrow |T_{p+q} - T_p| < \epsilon).$$

Par suite la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy et donc convergente. D'où la série $\sum_n u_n v_n$ est convergente. $\square$

Exemple 26. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(2n)}{n^2 - \ln(n)}$. D'une part, on a (ii)

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^n \sin(2n) \right| \leq M.$$

D'autre part, on pose $v_k = \frac{n+1}{n^2 - \ln(n)}$. La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x^2 - \ln(x)}$ est décroissante sur $]e, +\infty[$. d'où la suite $v_k = \frac{n+1}{n^2 - \ln(n)}$ est décroissante sur $]2, +\infty[$. Par conséquent, d'après le critère de Leibniz, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(2n)}{n^2 - \ln(n)}$ converge.

1.5.3 Série absolument convergente

Définition 7. La série $\sum_n u_n$ est dite absolument convergente, si la série $\sum_n |u_n|$ est convergente.

Proposition 13. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum_n u_n$ une série absolument convergente. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

La série $\sum_n u_n$ est une série absolument convergente si et seulement si $\sum_n |u_n|$ converge i.e., la suite $(T_n)_n$ converge i.e., la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy i.e.,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}^* : (p \geq N_\epsilon \Rightarrow |T_{n+p} - T_p| < \epsilon).$$

Comme

$$|T_{n+p} - T_p| = \left| \sum_{k=p+1}^{n+p} T_k \right| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} |T_k| = |T_{n+p} - T_p| < \epsilon.$$

Alors, la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy. □

Remarque 6. La réciproque de cette proposition est en général fautive, par exemple : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Exemple 27. la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente. On a

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$ est absolument convergente.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.

Exemple 28. On va étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n^3+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

On a

$$\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'où

$$\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc

$$|u_n| = \left| \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ converge et d'où il découle que la série $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n^3+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ est absolument convergente.

Exemple 29. On va étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

On sait que

$$\left| \arctan\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \right| \leq \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$|u_n| = \left| \arctan\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ converge et d'où il découle que la série la série $\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ est absolument convergente.

Exemple 30. On va étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(2n)}{n^2 - \ln(n)}$. On a

$$\left| \frac{(n+1) \sin(2n)}{n^2 - \ln(n)} \right| \leq \frac{n+1}{n^2 - \ln(n)}.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(n) \underset{+\infty}{=} n^2,$$

alors

$$n^2 - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} n^2.$$

Donc

$$\frac{n+1}{n^2 - \ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ diverge et d'où il découle que la série la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(2n)}{n^2 - \ln(n)}$ n'est pas absolument convergente.

Série semi-convergente :

Définition 8. Une série $\sum_n u_n$ est dite semi-convergente si elle est convergente et la série $\sum_n |u_n|$ diverge.

Remarque 7. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ est semi-convergente.

Définition 9. (Série commutativement convergente). On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est commutativement convergente, si pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum_n u_{\varphi(n)}$ est convergente.

Proposition 14. *Toute série absolument convergente est commutativement convergente. Autrement dit : une série absolument convergente, converge toujours même si on change l'ordre de ses termes, et la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.*

Remarque 8. La propriété citée à la proposition précédente n'est pas vraie si la série est semi-convergente, c'est-à-dire on ne peut pas changer l'ordre des termes.

1.6 Produit des séries

Définition 10. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques.

La série $\sum_n w_n$ avec $w_n = \sum_k u_k v_{n-k}$ est dite produit des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$.

Exemple 31. Soit $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!}$ deux séries numériques. Alors le terme général de la série produit $\sum_n w_n$ est

$$w_n = \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Théorème 4. (*Théorème de Cauchy (1821)*). Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques absolument convergentes, alors leur série produit $\sum_n w_n$ est absolument convergente et à pour somme le produit des sommes, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Théorème 5. (*Mertens (1875)*). Soit $\sum_n u_n$ une série numérique absolument convergente et $\sum_n v_n$ une série numérique convergente, alors la série $\sum_n w_n$ produit des $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ est convergente et a pour somme le produit des sommes, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

1.7 Exercices corrigés

Exercice 1. En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}, \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}, \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \cos\left(\frac{3}{2^n}\right), \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right), \sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right).$$

Solution : En utilisant la limite des suites des sommes partielles, on va déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+2)} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right] + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \right] - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. On a

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{2}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}.$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ converge.

3) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$. On a

$$\frac{1}{16n^2 - 8n - 3} = \frac{1}{(16n - 6)(16n - 3)} = \frac{3}{8(16n - 6)} + \frac{3}{16(16n - 3)}.$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{16k^2 - 8k - 3} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$ converge.

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$. On a

$$\frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2} = \frac{1}{8(2n+1)^2} - \frac{1}{8(2n-1)^2}.$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k+1)^2(2k-1)^2} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{8}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$ converge.

5) $\sum_{n \geq 1} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \frac{k - \sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{k+1}} - \frac{\sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{k(k+1)}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}. \end{aligned}$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge.

6) $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)$. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{3}{2^{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right) - \cos\left(\frac{4}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right) - \cos(1) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \sin\left(\frac{3}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right) - \cos(1) \right).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} (1 - \cos(1)) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)$ converge et sa somme est $S = \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$.

7) $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$. On a

$$\ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}\right) = \ln(n(n+1)-2) - \ln(n(n+1))$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{3n}\right).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(3).$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge et sa somme est $S = -\ln(3)$.

8) $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$. On a

$$\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\right) = \ln(n-1) + \ln(n^2+n+1) - \ln(n^2-n+1) + \ln(n+1)$$

D'où

$$S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{3(n+1)}\right).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln \left(\frac{2}{3} \right).$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{n^3-1}{n^3+1} \right)$ converge et sa somme est $S = \ln \left(\frac{2}{3} \right)$.

Exercice 2. 1) Montrer que les séries suivantes sont divergentes.

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 1}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n^3 - 2}{3n^3 + 4} \right)^{n^3}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^3 + 1}{n + 3} \right) \arcsin \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right), \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n + 1}.$$

$$\sum_{n \geq 1} \tan \left(\frac{\pi}{4n} \right), \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \right).$$

2) Montrer que les séries suivantes sont convergentes.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}, \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(3 + (-1)^n)}{n^2},$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \sin(n)}{n^2 + 2 \ln(n)}, \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right), \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n^3)}{2^n + n^3}, \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{n} \right) - 1 \right).$$

Solution : 1) Pour montrer la divergence de la séries suivantes, on peut appliquer la condition nécessaire de la convergence :

a) On pose $u_n = (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$.

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2k} \frac{8k^2 + 6k + 4}{8k^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8k^2 + 6k + 4}{8k^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8k^2}{8k^2} = 1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2k+1} \frac{2(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 4}{2(2k+1)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{8k^2}{8k^2} = -1.$$

Alors, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$ est divergente (de sorte que les deux limite ne coïncident pas i.e., $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_k$ n'existe pas).

b) On pose $u_n = \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4} \right)^{n^3}$.

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^3 - 2}{3n^3 + 4} \right)^{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{2}{3n^3}}{1 + \frac{4}{3n^3}} \right)^{n^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1 - \frac{2}{3n^3}}{1 + \frac{4}{3n^3}} \right)^{3n^3} \right]^{\frac{1}{3}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-2}}{e^4} \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Alors, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4} \right)^{n^3}$ est divergente.

c) On pose $u_n = \left(\frac{n^3+1}{n+3} \right) \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right)$.

Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \\ \frac{n^3+1}{n+3} \underset{+\infty}{\sim} n^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\frac{n^3+1}{n+3} \right) \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right) \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3+1}{n+3} \right) \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right) = 1.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^3+1}{n+3} \right) \arcsin \left(\frac{1}{n^2+1} \right)$ est divergente.

d) On pose $u_n = \tan \left(\frac{\pi}{4n} \right)$.

Comme

$$\tan \left(\frac{\pi}{4n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n},$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi}{4n}$ est divergente. Alors, d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \geq 1} \tan \left(\frac{\pi}{4n} \right)$ est divergente.

e) On peut utiliser la négation du critère de Cauchy. La suite partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy (et par conséquent n'est pas convergente) i.e.,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p > q \geq n) \text{ et } |S_p - S_q| \geq \varepsilon.$$

On a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k+1} \right| > \frac{2(p-2)}{2n+2p+1} > \frac{1}{6}.$$

Donc, d'après la négation du critère de Cauchy, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n+1}$ est divergente.

f) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \right)$.

Comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \arctan \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}.$$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ diverge (série de Riemann $\alpha = \frac{5}{6} < 1$). Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} \arctan \left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \right)$ est divergente.

2) Pour montrer la convergence d'une série numérique, on peut utiliser les critères de convergence.

a) La suite partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (et par conséquent est convergente) i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p > q \geq n) \text{ et } |S_p - S_q| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(kx)}{2^k} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{2}{2^{n+1}} (1 - 2^p) < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de Cauchy ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ est convergente.

b) La suite partielle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (et par conséquent est convergente) i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 (p > q \geq n) \text{ et } |S_p - S_q| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k(k+1)} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de Cauchy ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$ est convergente.

e) On pose $u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$. Comme

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}, \quad \forall n \geq 1,$$

et la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{2n-1}} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4} \right)^n,$$

est convergente (de sorte que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrique converge). Alors,

d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ converge.

e) On pose $u_n = \frac{\sin(3+(-1)^n)}{n^2}$. Comme

$$|u_n| = \left| \frac{\sin(3+(-1)^n)}{n^2} \right| \leq \frac{4}{n^2}, \quad \forall n \geq 1,$$

et la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2},$$

est convergente (Corollaire 6). Alors, d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(3+(-1)^n)}{n^2}$ converge.

f) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \sin(n)}{n^2 + 2 \ln(n)}$. On pose $u_n = \frac{\ln(n) + \sin(n)}{n^2 + 2 \ln(n)}$.

En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\frac{\ln(n) + \sin(n)}{n^2 + 2 \ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

D'après, le critère d'intégrale, l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx,$$

converge. En effet, on intègre par partie et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right] = 1.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \sin(n)}{n^2 + 2 \ln(n)}$ converge.

g) $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$. Comme

$$1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\pi^2}{n^2},$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2\pi^2}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ converge.

h) $\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n^3)}{2^n + n^3}$. On a

$$u_n = \frac{\arctan(n^3)}{2^n + n^3} < \frac{\frac{\pi}{2}}{2^n + n^3} \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi}{2^{n+1}}$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n^3)}{2^n + n^3}$ converge.

i) $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right)$. Comme

$$u_n = \sqrt{n} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \left(\frac{\pi^2}{2n^2} \right) = \frac{\pi^2}{2n\sqrt{n}},$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi^2}{2n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n^3)}{2^n + n^3}$ converge.

Exercice 3. Trouver les valeurs de α pour lesquelles les séries suivantes sont convergentes

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha.$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}, \quad \sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{1 + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^\alpha$$

Solution : 1) $\sum_{n \geq 1} \left(1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(1 - n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$\left(1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6^\alpha n^{2\alpha}}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

2) $\sum_{n \geq 1} \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

2) $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left(e^{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \\ &= \left[1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n}\right]^\alpha \\ &= \left[\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^\alpha. \end{aligned}$$

En appliquant $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on obtient

$$u_n = \left[1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^\alpha.$$

D'où

$$\left(e^{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

3) $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha} \\ &= \frac{\sqrt[3]{n^2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{n^\alpha} \\ &= \frac{\sqrt[3]{n^2} \left(1 + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1 + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{n^\alpha} \\ &= \frac{\sqrt[3]{n^2} \left(\frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\sqrt[3]{n^2} \left(\frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{4}{3}}}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{4}{3}}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{3}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > \frac{1}{3}$.

5) $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{1 + sh\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^\alpha$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \left(e^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{1 + sh\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^\alpha \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[1 + \frac{1}{2}sh\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{8}sh^2\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\left(sh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right) \right] \right)^\alpha, \end{aligned}$$

et comme

$$1 + \frac{1}{2}sh\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{8}sh^2\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\left(sh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right)^\alpha$$

Par suite

$$u_n = \left(\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(4n^2)^\alpha}.$$

Donc, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha + \frac{4}{3}}}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{3}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > \frac{1}{3}$.

Exercice 4. Étudier la nature des séries suivantes à l'aide des règles de d'Alembert, Cauchy et d'intégrale :

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)!}, \sum_{n \geq 1} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right), \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n \cdot n!}, \sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}. \\ &\sum_{n \geq 1} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}. \\ &\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Solution : 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)!}$. D'après la règle de d'Alembert, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)!} \times (2n+1)! \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \times (2n+1)! \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

2) $\sum_{n \geq 1} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. D'après la règle d'Alembert, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

Comme

$$\frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} n \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ converge.

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$. D'après la règle d'Alembert, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \times \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot (n+1)n!} \times \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$ converge.

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}$. D'après la règle d'Alembert, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3 \cdot 4^{3n+3}} \times \frac{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}{(3n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{((n+1)n!)^3 \cdot 4^{3n} \cdot 4^3} \times \frac{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}{(3n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{64(n+1)^3} = \frac{27}{64} < 1. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}$ converge.

5) $\sum_{n \geq 1} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. D'après la règle de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

6) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$. D'après la règle de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{6}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^5}{e^6} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$ converge.

7) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$. D'après la règle de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}} < 1. \end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$ converge.

8) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$. D'après le critère d'intégrale, l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)} dx,$$

converge. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} dx \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_1^{+\infty} \frac{d(\ln^2(1+x))}{\ln^2(1+x)} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} \right]_1^t \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(1+t)} \right] = \frac{1}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ converge.

9) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. D'après le critère d'intégrale, l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 dx,$$

converge. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2 dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1+2x+x^2}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_1^t \frac{1+2x+x^2}{(1+x^2)^2} dx \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_1^t \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^t \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_1^t \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^t \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\arctan(x) + \frac{1}{(1+x^2)} \right]_1^t \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$ converge.

10) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

D'après le critère d'intégrale, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$ sont de même nature.

En utilisant le développement limité de f au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x}} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\
&= \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x+1) - \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ est convergente.

Exercice 5. Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^5}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}. \\
&\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}, \quad \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right), \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln^2(1+n)} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Solution : 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^5}}$. On a

$$|u_n| = \left| \frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^5}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^5}}$ est absolument convergente, ainsi elle est convergente.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$. En multipliant et en divisant par $n - (-1)^n \sqrt{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \\
&= \frac{(-1)^n (n - (-1)^n \sqrt{n})}{(n + (-1)^n \sqrt{n})(n - (-1)^n \sqrt{n})} \\
&= \frac{(-1)^n n - \sqrt{n}}{n^2 - n} \\
&= \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} - \sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

D'une part, d'après le théorème d'Abel, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n-1}$ est convergente.

D'autre part, on a

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} - \sqrt{n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} - \sqrt{n}}$ à termes positifs est convergente.

Par suite, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ est la somme de deux séries convergentes, donc elle est convergente.

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$. D'après Leibniz, on a d'une part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

D'autre part, la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est définie par

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

On a

$$f'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow x > e^2.$$

D'où, la fonction f est décroissante sur $]e^2, +\infty[$. Cela veut dire que la suite (u_n) est décroissante sur $]e^2, +\infty[$.

Donc, D'après Leibniz la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

4) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}$. D'après Leibniz, on a d'une part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = 0.$$

D'autre part, la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est définie par

$$f'(x) = \frac{-x + 4\sqrt{x} - 3}{6(\sqrt{x} + 2)(\sqrt[3]{x+1})^2 \sqrt{x}}.$$

Sur $]0, +\infty[$. On a

$$f'(x) = \frac{-x + 4\sqrt{x} - 3}{6(\sqrt{x} + 2)(\sqrt[3]{x+1})^2 \sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]9, +\infty[.$$

D'où, la fonction f est décroissante sur $]9, +\infty[$ et $]0, 1[$. Cela veut dire que la suite (u_n) est décroissante sur $]9, +\infty[$.

Donc, d'après Leibniz la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ est convergente.

Cependant, la série

$$\sum_{n \geq 1} |(-1)^n u_n| = \sum_{n \geq 1} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2} \right| = \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2},$$

est diverge. En effet

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ diverge alors, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$ diverge.

Par suite, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$ est semi-convergente.

5) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)$. En utilisant le développement limité de u_n au voisinage de $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)^2 + o \left(\left(\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

D'où

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ est semi-convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)$ est semi-convergente.

6) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln^2(1+n)} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$. Puisque

$$1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right),$$

et

$$\sin(t) \leq t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A lors, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2(1+n)} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \frac{2(-1)^n \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)}{\ln^2(1+n)},$$

et

$$|u_n| = \left| \frac{2(-1)^n \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)}{\ln^2(1+n)} \right| \leq \frac{1}{n \ln^2(1+n)} \leq \frac{1}{(1+n) \ln^2(1+n)}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(1+n) \ln^2(1+n)}$ est convergente (voir l'exercice précédente). Alors la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln^2(1+n)} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right),$$

est absolument convergente.

Exercice 6. Étudier la nature de la série de Bertrand suivante

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution : On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(1+n)}$. Premièrement nous donnons un tableau qui montre la limite du terme général u_n selon α et β .

	$\alpha > 0$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0$
$\beta > 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
$\beta = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
$\beta < 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

D'après le tableau précédent et la négation de la condition nécessaire de la convergence, il est clair que la série de Bertrand

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

est divergente pour $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$.

Pour $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. On a la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln^\beta(n)}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

est divergente. En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^\beta(n)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \beta < 0, \\ 1, & \text{si } \beta = 0, \\ 0, & \text{si } \beta > 0, \end{cases}$$

alors, la série est divergente pour $\beta \leq 0$.

Pour $\beta = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln^\beta(n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta(n)}{n} = 0.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, ainsi d'après le Corollaire 2, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln^\beta(n)}$ diverge.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta(n)}{n} = 0.$$

Alors, pour $\alpha > 1$ la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge et donc d'après le Corollaire 2, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} = 0.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, est divergente, ainsi d'après le Corollaire 2, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.

Pour $\alpha = 1$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$ positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta(x)} dx$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ sont de même nature. Or, si $\beta \neq 1$, on

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta(x)} dx &= \int_{\ln(2)}^{+\infty} \ln^{-\beta}(x) d(\ln(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\ln(2)}^n \ln^{-\beta}(x) d(\ln(x)) \\ &= \begin{cases} \frac{[\ln(2)]^{1-\beta}}{\beta-1}, & \text{si } \beta > 1. \\ +\infty, & \text{si } \beta < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\beta = 1$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

Ainsi, si $\alpha = 1$, ou $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ devient une série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ qui est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\epsilon \ln^\beta(n)} = 0.$$

D'où, comme la série (série de Riemann) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$ est convergente si et seulement si $\alpha - \epsilon > 1$ (il suffit de prendre par exemple $\epsilon = \frac{\alpha-1}{2}$), alors, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

Si $\alpha \leq 1$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln^\beta(n) = 0.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente (série de Riemann pour $\alpha \leq 1$), ainsi d'après le Corollaire 2, la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.

Comme un résumé des résultats obtenu ci-dessus la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires

2.1 Préliminaires et vocabulaire

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Cette fonction est a priori définie sur une partie de $\mathbb{R}$, son domaine de définition, et est à valeurs réelles, ou complexes. Si on ne précise pas, l'inconnue est une fonction à valeurs réelles et résoudre l'équation signifie trouver toutes les solutions à valeurs réelles. La fonction inconnue est en général notée y (parfois f). La variable est habituellement x , ou t . L'équation est une relation entre la fonction y , plusieurs de ses dérivées, et potentiellement d'autres fonctions. Un exemple simple

$$y''(x) + y'(x) = \cos(x).$$

On ne note pas toujours la variable x dans l'équation différentielle : par exemple, on peut parfois écrire

$$y'' + y' = \cos(x).$$

Lorsque l'on résout une équation différentielle, on cherche en général des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ le plus grand possible. Il n'existe pas toujours des solutions définies sur $\mathbb{R}$, pour des raisons diverses, évidentes ou pas. Il y a parfois des raisons plus subtiles qui peuvent empêcher l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$.

Une fois que l'on s'est fixé un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, résoudre l'équation sur I c'est trouver toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation. L'ensemble de toutes les solutions peut-être vide, fini, ou infini, et il est parfois paramétré par plusieurs paramètres réels, ou complexes. Par exemple, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' = 0$ est l'ensemble (de fonction)

$$\{t \mapsto \lambda t + \mu, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Dans la suite, on va s'intéresser à une liste précise d'équations, que l'on peut résoudre assez facilement.

Définition 11. Une équation différentielle est une équation établissant une relation entre la variable indépendante x , la fonction inconnue de x , $y = f(x)$ et ses dérivées $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Symboliquement, une équation différentielle est :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Lorsque y est fonction d'une seule variable x , l'équation différentielle est qualifiée d'ordinaire.

Dans ce qui suit, il ne sera question que d'équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles concernant des fonctions de plusieurs variables, sont des équations différentielles aux dérivées partielles.

Définition 12. L'ordre d'une équation différentielle correspond à l'ordre le plus élevé des dérivées contenues dans l'équation.

Définition 13. La solution ou l'intégrale d'une équation différentielle est toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

2.2 Equations différentielles lineaires d'ordre n :

Définition 14. Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si y et ses dérivées sont du premier degré de la forme :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $f(x)$ sont des fonctions de x ou des constantes.

Remarque 9. (i) Si $f(x) = 0$, l'équation est dite homogène (sans second membre). Et inversement si $f(x) \neq 0$, elle est non homogène.

(ii) En économie dynamique, la variable indépendante est le temps t . On considère ainsi les équations différentielles de la forme :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ avec } y = f(t) \text{ inconnue.}$$

2.2.1 Equation différentielle lineaires d'ordre 1 :

2.2.1.1 Forme de l'équation :

Ce sont des équations différentielles du type : $y' + a(x)y = b(x)$, (E), où a et b sont des fonctions numériques.

Exemple 32. L'équation $3y' - 4y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1 linéaire à coefficients constants, homogène. On dit aussi sans second membre, au lieu de homogène.

Exemple 33. L'équation $y' - 4xy = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1 linéaire à coefficients non constants, homogène.

2.2.1.2 Résolution de l'équation sans second membre

Il y a toujours au moins une solution sur $\mathbb{R}$: En effet, la fonction nulle $y = 0$ est toujours solution de (E).

Par ailleurs, si $y \neq 0$, alors

$$y' + a(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx \\ &\Leftrightarrow \ln |y| = - \int a(x) dx + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y = C e^{-\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.2.1.3 Résolution de l'équation avec second membre

(i) Soit y_0 est une solution de (E) . Pour une fonction y est une solution de (E) il faut et il suffit qu'il existe une fonction y_1 solution de l'équation différentielle homogène telle que $y = y_0 + y_1$.

Si on a trouvé une solution particulière y_0 de (E) , on obtient directement la solution générale de (E) en ajoutant à y_0 , la solution générale de l'équation différentielle homogène.

(ii) **Méthode de variation de la constante :** On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ (E). Si y est une solution de l'équation différentielle homogène $y' + a(x)y = 0$ alors, la méthode de variation de la constante consiste à rechercher une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (E) sous la forme $x \mapsto C(x)y(x)$.

Exemple 34. On désire résoudre

$$y' + y = 2 + 2x \quad (E).$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée

$$y' + y = 0.$$

Cette équation a pour solution générale

$$y = C e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On utilise la méthode de variation de la constante : On recherche les solution de l'équation (E) de la forme

$$y = C(x) e^{-x},$$

où C est une fonction de x , dérivable, inconnue.

En dérive y , on a

$$y' = C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x},$$

et en reportant y et y' dans l'équation (E), on obtient

$$C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x} + C(x) e^{-x} = 2 + 2x,$$

d'où

$$C'(x) e^{-x} = 2 + 2x,$$

on intègre par parties, on trouve

$$C(x) = 2x + e^x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) (la solution générale de (E)) est

$$y = C(x) e^{-x} = (2x + k) e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 35. On désire résoudre

$$y' + 4y = e^{-4x} \sin(3x), \quad (E).$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée

$$y' + 4y = 0.$$

Cette équation a pour solution générale

$$y = C e^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On utilise la méthode de variation de la constante : On recherche les solution de l'équation (E) de la forme

$$y = C(x) e^{-4x},$$

où C est une fonction de x , dérivable, inconnue.

En dérive y , on a

$$y' = C'(x) e^{-4x} - 4C(x) e^{-4x},$$

et en reportant y et y' dans l'équation (E) , on obtient

$$C'(x) e^{-4x} - 4C(x) e^{-4x} + 4C(x) e^{-4x} = e^{-4x} \sin(3x),$$

d'où

$$C'(x) = \sin(3x),$$

on intègre par parties, on trouve

$$C(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) (la solution générale de (E)) est

$$y = C(x) e^{-4x} = \left(k - \frac{1}{3} \cos(3x) \right) e^{-4x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2.1.4 Quelques types d'équations différentielles du premier ordre :

1) Equations différentielles à variables séparées :

Définition 15. Soient $J \subset \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle est du type

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (E).$$

Méthode de résolution : Pour résoudre l'équation (E) , on peut séparer deux termes l'un dépendant de y seule et l'autre dépendant de x seule. En effet,

$$(E) \Leftrightarrow g(y) y' = f(x),$$

où $g(y)$ ne dépend que de y et $f(x)$ ne dépend que de x , peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} g(y) y' = f(x) &\Rightarrow g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \\ &\Rightarrow g(y) dy = f(x) dx. \end{aligned}$$

Dans cette dernière écriture, les deux variables y et x sont séparées. La solution est :

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 36. Soit l'équation différentielle $y' = x$, (E) . On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} y' = x &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \\ &\Rightarrow dy = x dx \\ &\Rightarrow \int dy = \int x dx. \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $\frac{1}{2}x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Sont la famille des droites d'équation $y = \frac{1}{2}x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 37. Soit l'équation différentielle $xy' = y$, (E) . On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + c \\ &\Rightarrow y = kx, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des droites d'équation $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 38. Soit l'équation différentielle $y' = y + 2$, (E) . On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y+2} = 1 &\Rightarrow \frac{dy}{y+2} = dx \\ &\Rightarrow \ln |y+2| = x + c \\ &\Rightarrow y = ke^x - 2, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = ke^x - 2$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des courbes d'équation $y = ke^x - 2$, $k \in \mathbb{R}$.

2) Equation différentielle exacte :

Définition 16. Une équation différentielle de la forme $f(x, y) + y'g(x, y) = 0$ ou de la forme équivalente : $f(x, y) + \frac{dy}{dx}g(x, y) = 0$ est dite exacte s'il existe une fonction $u(x, y)$ telle que :

$$du = u_x dx + u_y dy = f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

Cette équation différentielle est donc exacte si elle est la différentielle totale de quelque fonction, d'où $du = 0$. Sa solution est $u = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 39. On désire résoudre

$$(2xy + 3y^2) dx + (x^2 + 6xy - 3y^2) dy = 0.$$

C'est une équation différentielle exacte, on pose

$$f(x, y) = 2xy + 3y^2, \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

D'où

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Ce qui montre que la partie gauche est une différentielle totale d'une fonction $u(x, y)$. Pour cette fonction, on a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2 \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy + \varphi'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \\ \varphi'(y) = -3y^2 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow u(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution de l'équation est

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 40. On désire résoudre

$$(3y^2 + 2xy + 2x) dx + (6xy + x^2 + 3) dy = 0.$$

C'est une équation différentielle exacte, on pose

$$f(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad \text{et} \quad g(x, y) = 6xy + x^2 + 3.$$

D'où

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Ce qui montre que la partie gauche est une différentielle totale d'une fonction $u(x, y)$. Pour cette fonction, on a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2 + 2x \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + 6xy + 3 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + x^2 + \varphi(y) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + 6xy + 3 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + 6xy + \varphi'(y) = x^2 + 6xy + 3 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + \varphi(y) \\ \varphi'(y) = 3 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + x^2 + 3y + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution de l'équation est

$$x^2y + 3xy^2 + x^2 + 3y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Equations différentielles homogènes en x et y : Ce sont des équations différentielles du type : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, (E) , où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Méthode de résolution : Pour résoudre l'équation (E) , on introduit la fonction auxiliaire $x \mapsto t = \frac{y}{x}$ et on a

$$y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$t' = \frac{f(t) - t}{x} \Leftrightarrow \frac{t'}{f(t) - t} = \frac{1}{x}, \quad (E')$$

(E') est une équation différentielle à variables séparées.

Exemple 41. Soit l'équation différentielle $x^2y' = xy - y^2$, (E) . On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

On pose

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$t'x = t^2 \Leftrightarrow \frac{t'}{t^2} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, t \neq 0, \quad (E').$$

(E') est une équation différentielle à variables séparées. On sépare les variables

$$(E') \Leftrightarrow \frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow -\frac{1}{t} &= \ln|x| + c \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{\ln|kx|}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = tx = -\frac{x}{\ln|kx|}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 42. Soit l'équation différentielle $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, (E) . On pose

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$t'x + t = e^t + t \Leftrightarrow t'x = e^t, \quad (E').$$

(E') est une équation différentielle à variables séparées. On sépare les variables

$$\begin{aligned} (E') &\Leftrightarrow \frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int e^{-t} dt &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow -e^{-t} &= \ln|x| + c \\ \Rightarrow e^{-t} &= \ln \frac{1}{|kx|} \\ \Rightarrow t &= -\ln \left(\ln \frac{1}{|kx|} \right), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = tx = -x \ln \left(\ln \frac{1}{|kx|} \right)$, $k \in \mathbb{R}$.

3) Equation de Bernoulli (découverte et résolue par Jacques Bernoulli (1759 – 1789)). Soient $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues dans $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 17. L'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)y^m$, $m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ est dite de Bernoulli.

Méthode de résolution : On pose $z(x) = y^{1-m}(x)$, d'où $z'(x) = (1-m)y'(x)y^{-m}(x)$. En divisant l'équation de Bernoulli par y^m , on obtient :

$$\frac{y'}{y^m} + a(x) \frac{y}{y^m} = b(x) \Leftrightarrow \frac{1}{m-1} z' + a(x) z = b(x),$$

qui est une équation linéaire de premier ordre non homogène. On la résout par la méthode de la variation de la constante.

Exemple 43. On va résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{1+x}y = -(1+x)y^4$.

On pose $z(x) = \frac{1}{y^3(x)}$. En considérant $y > 0$. On obtient

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{1}{1+x}z = -(1+x).$$

Cette équation de premier ordre linéaire non homogène admet la solution générale suivante :

$$z = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Comme $z(x) = \frac{1}{y^3(x)}$, alors

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 44. On va résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x^3y^3$, (E).

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$. Cela donne

$$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^3y' = -\frac{1}{2}z'.$$

Remplaçons y par z dans l'équation ci-dessus (E). On obtient

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x^3.$$

Cette équation de premier ordre linéaire non homogène admet la solution générale suivante :

$$z = x^2 + 1 + ce^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Comme $z = \frac{1}{y^2}$, alors

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4) Equation différentielle de Riccati

Définition 18. L'équation différentielle de Riccati est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)y^2.$$

Méthode de résolution : Il faut connaître une solution particulière ϕ de l'équation de Riccati. On pose :

$$z(x) = y(x) - \phi(x).$$

Comme y et ϕ sont solutions de l'équation, on a

$$[z + \phi]' + a(x)[z + \phi] = b(x)[z + \phi] \Rightarrow z' + [a(x) + b(x)\phi(x)]z = b(x)z^2.$$

Cette dernière est une équation de Bernoulli que nous savons résoudre.

Exemple 45. On va résoudre l'équation différentielle suivante

$$xy' + 3y = x^2y^2 \quad (E).$$

Cette équation est de Bernoulli avec $m = 2$. Divison les deux membres par y^2 , on obtient

$$\frac{xy'}{y^2} + 3\frac{y}{y^2} = x^2.$$

Posons

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

On obtient en z l'équation

$$-xz' + 3z = x^2.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre linéaire dont la solution est

$$z = (1 + kx)x^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution général de l'équation (E) est

$$y = \frac{1}{(1 + kx)x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 46. On va résoudre l'équation différentielle suivante

$$2xy' - y = -y^3 \sin(x) \quad (E).$$

Cette équation est de Bernoulli avec $m = 3$. Divison les deux membres par y^3 , on obtient

$$2\frac{xy'}{y^3} - \frac{y}{y^3} = -\sin(x).$$

Posons

$$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3}.$$

On obtient en z l'équation

$$-xz' + \frac{1}{2}z = -\sin(x).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre linéaire dont la solution est

$$z = \frac{k - \cos(x)}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution général de l'équation (E) est

$$y = \frac{1}{(1 + kx)x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Exercices corrigés

Exercice 7. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

- 1) $y' - 4y = 3, \quad x \in \mathbb{R}.$
- 2) $y' - 4y = 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$
- 3) $y' - y \tan(x) = \sin(x), \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$
- 4) $y' = \frac{y}{x} + x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$
- 5) $(1 + x^2)y' - xy = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$
- 6) $(1 + x)y' + xy = -1, \quad y(0) = 2, \quad x > -1.$
- 7) $xy' - (1 - x \tan(x))y = x^2 \cos(x).$
- 8) $(x^2 - 1)y' - xy = -, \quad x \in \mathbb{R}.$

Solution : 1) $y' - 4y = 3, \quad x \in \mathbb{R}.$

a) La résolution de l'équation homogène est $y' - 4y = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 y' - 4y = 0 &\Leftrightarrow y' = 4y \\
 &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 4 \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} = \int 4dx \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 4dx \\
 &\Leftrightarrow \ln(y) + c_0 = 4x, \quad c_0 \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \ln(y) + \ln(c_1) = 4x, \quad c_0 = \ln(c_1) \\
 &\Leftrightarrow \ln(c_1 y) = 4x \\
 &\Leftrightarrow y = Ce^{4x}, \quad C = \frac{1}{c_1} \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = Ce^{4x}.$$

b) On cherche une solution particulière (singulière) y_0 vérifie l'équation $y' - 4y = 3$. Cette solution s'écrit

$$y_0 = g(x)e^{4x}.$$

On a

$$y'_0 = g'(x)e^{4x} + 4g(x)e^{4x}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 g'(x)e^{4x} + 4g(x)e^{4x} - 4g(x)e^{4x} &= 3 \Rightarrow g'(x)e^{4x} = 3 \\
 &\Rightarrow g'(x) = 3e^{-4x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int g'(x) dx = 3 \int e^{-4x} dx \\
&\Rightarrow \int g'(x) dx = -\frac{3}{4} \int -4e^{-4x} dx \\
&\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4} e^{-4x} \\
&\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4} e^{-4x} e^{4x} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale s'écrit sous la forme suivante :

$$y = C e^{4x} - \frac{3}{4}, \quad \text{ou } C \in \mathbb{R}.$$

2) $y' - 4y = 2e^x$.

a) La solution de l'équation homogène $y' - 4y = 0$ est

$$y = C e^{4x}.$$

b) On cherche une solution particulière y_0 vérifie l'équation $y'_0 - 4y_0 = 2e^x$. Cette solution s'écrit

$$y_0 = g(x) e^{4x}.$$

On a

$$y'_0 = g'(x) e^{4x} + 4g(x) e^{4x}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
g'(x) e^{4x} + 4g(x) e^{4x} - 4g(x) e^{4x} &= 2e^x \Rightarrow g'(x) e^{4x} = 2e^x \\
&\Rightarrow g'(x) = 2e^{-3x} \\
&\Rightarrow \int g'(x) dx = 2 \int e^{-3x} dx \\
&\Rightarrow \int g'(x) dx = -\frac{2}{3} \int -3e^{-3x} dx \\
&\Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3} e^{-3x}
\end{aligned}$$

Donc, la solution général s'écrit sous la forme suivante :

$$y = C e^{4x} - \frac{2}{3} e^{-3x}.$$

3) $y' - y \tan(x) = \sin(x)$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a) La solution de l'équation homogène $y' - y \tan(x) = 0$ est

$$y = C e^{-\ln[\cos(x)]} = \frac{C}{\cos(x)}, \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos(x) > 0.$$

b) On cherche une solution particulière y_0 vérifie l'équation $y'_0 - y_0 \tan(x) = \sin(x)$. Cette solution s'écrit

$$y_0 = \frac{g(x)}{\cos(x)}.$$

On a

$$y'_0 = \frac{g'(x)}{\cos(x)} + \frac{g(x) \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

D'où

$$\frac{g'(x)}{\cos(x)} + \frac{g(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} - \frac{g(x)}{\cos(x)} \tan(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = \cos(x) \sin(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x).$$

Donc,

$$y_0 = \frac{\sin^2(x)}{2 \cos(x)}.$$

Par suite, la solution générale est :

$$y = \frac{C}{\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{2 \cos(x)} = \frac{C_1 + \sin^2(x)}{2 \cos(x)}, \text{ ou } C_1 = 2C \in \mathbb{R}.$$

4) $y' = \frac{y}{x} + x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$

a) La solution de l'équation homogène $y' - \frac{y}{x} = 0$ est

$$y = C e^{\ln(x)} = Cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

b) On cherche une solution particulière y_0 vérifie l'équation $y' = \frac{y}{x} + x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$. Cette solution s'écrit

$$y_0 = xg(x) = x^2.$$

Par suite, la solution générale est :

$$y = Cx + x^2, \quad \text{ou } C \in \mathbb{R}.$$

5) $(1 + x^2) y' - xy = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

a) La solution de l'équation homogène $(1 + x^2) y' - xy = 0$ est

$$y = C e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} = C \sqrt{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

6) $(1 + x) y' + xy = -1, \quad y(0) = 2, \quad x > -1.$

a) La solution de l'équation homogène $(1 + x) y' + xy = 0$ est

$$y = \frac{C e^x}{1 + x}.$$

b) On cherche une solution particulière y_0 vérifie l'équation $(1 + x) y' + xy = -1$. Cette solution s'écrit

$$y_0 = \frac{g(x) e^x}{1 + x} = \frac{e^{-x} e^x}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}.$$

Par suite, la solution générale est :

$$y = \frac{1 + C e^x}{1 + x}.$$

c) Par la condition initiale $y(0) = 2$, on va déterminer la constante réel C . On a

$$\begin{aligned} y(0) = 2 &\Rightarrow \frac{1 + Ce^0}{1 + 0} = 2 \\ &\Rightarrow C = 1. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale est :

$$y = \frac{1 + e^x}{1 + x}.$$

7) On désire résoudre

$$xy' - (1 - x \tan(x))y = x^2 \cos(x), \quad (E)$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée

$$xy' - (1 - x \tan(x))y = 0.$$

Cette équation a pour solution générale

$$y = C |x \cos(x)|, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On utilise la méthode de variation de la constante : On recherche les solution de l'équation (E) de la forme

$$y = C(x) |x \cos(x)|,$$

où C est une fonction de x , dérivable, inconnue.

En reportant y et y' dans l'équation (E), on obtient

$$C'(x) = \frac{x \cos(x)}{|x \cos(x)|} = \epsilon,$$

où $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.

On a $\epsilon = 1$, si

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in]-2k\pi - \frac{3\pi}{2}, -2k\pi - \frac{\pi}{2}[, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{ou} \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{array} \right.$$

On a $\epsilon = -1$, si

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in]2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{5\pi}{2}[, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{ou} \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[. \end{array} \right.$$

on intègre, on trouve

$$C(x) = \epsilon x + r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) (la solution générale de (E)) est

$$y = (r + \epsilon x) |x \cos(x)|, \quad r \in \mathbb{R}.$$

8) On désire résoudre

$$(x^2 - 1) y' - xy = -1, \quad (E)$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) ,

$$(x^2 - 1) y' - xy = 0.$$

Cette équation a pour solution générale

$$y = \frac{C}{\sqrt{|x^2 - 1|}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cela, veut dire qu'on a

$$y = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{x^2 - 1}}, & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

ou encore

$$y = \frac{C}{\sqrt{\epsilon(x^2 - 1)}}, \quad \text{et } \epsilon = 1, \text{ si } |x| > 1 \text{ ou } \epsilon = -1 \text{ si } |x| < 1.$$

On utilise la méthode de variation de la constante : On recherche les solutions de l'équation (E) de la forme

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{|x^2 - 1|}},$$

où C est une fonction de x , dérivable, inconnue.

En reportant y et y' dans l'équation (E) , on obtient

$$\frac{(x^2 - 1) C'(x)}{\sqrt{\epsilon(x^2 - 1)}} = -1 \Rightarrow C'(x) = \frac{\sqrt{\epsilon(x^2 - 1)}}{x^2 - 1},$$

où $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.

On en déduit que

$$C(x) = \begin{cases} \operatorname{argch}(x) + r, & \text{si } |x| > 1, \\ \arcsin(x) + r, & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{R}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) (la solution générale de (E)) est

$$y = \begin{cases} \frac{r + \operatorname{argch}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} + r, & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{r + \arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}} + r, & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle

$$|x| y' + (x - 1) y = x^3.$$

- 1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]0, +\infty[$.
- 2) Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]-\infty, 0[$.

Solution : Pour $x \in]0, +\infty[$ l'équation est

$$xy' + (x-1)y = x^3 \Leftrightarrow y' + \frac{x-1}{x}y = x^2, \quad (E).$$

a) L'équation homogène est

$$y' + \frac{x-1}{x}y = 0.$$

D'où, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est

$$y = Cxe^{-x}.$$

b) Une solution particulière est

$$y_0 = g(x)e^{-(x-\ln(x))},$$

avec g primitive de

$$f(x) = xe^x.$$

D'où

$$g(x) = (x-1)e^{-x}.$$

Donc

$$y_0 = g(x)e^{-(x-\ln(x))} = x(x-1).$$

Par suite, la solution générale est

$$y = Cxe^{-x} + y_0 = Cxe^{-x} + x(x-1), \quad x \in]0, +\infty[.$$

2) D'une manière similaire, on trouve la solution générale dans le deuxième cas

$$y = \frac{-Ke^{-x} + x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{x}, \quad x \in]-\infty, 0[.$$

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = y(1 - \frac{1}{x^2})$.

2) $y' = y \cos(x)$.

3) $(x^2 + 1)y' = xy$.

4) $y' = x(y^2 + 4)$.

Solution : 1) $y' = y(1 - \frac{1}{x^2})$, (E) . On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = x + \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = ke^{x+\frac{1}{x}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = ke^{x+\frac{1}{x}}$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des courbes d'équation $y = ke^{x+\frac{1}{x}}$, $k \in \mathbb{R}$.

2) $y' = y \cos(x)$, (E). On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \cos(x) dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos(x) dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \sin(x) + c \\ &\Rightarrow y = ke^{\sin(x)}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = ke^{\sin(x)}$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des courbes d'équation $y = ke^{\sin(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.

3) $(x^2 + 1)y' = xy$, (E). On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \\ &\Rightarrow y = k\sqrt{x^2 + 1}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = k\sqrt{x^2 + 1}$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des courbes d'équation $y = k\sqrt{x^2 + 1}$, $k \in \mathbb{R}$.

4) $y' = x(y^2 + 4)$, (E). On sépare les variables, on a

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2 + 4} &= x \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 4} = x dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 4} = \int x dx \\ &\Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2 + c \\ &\Rightarrow y = \tan(kx^2), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = \tan(kx^2)$, $k \in \mathbb{R}$. Sont la famille des courbes d'équation $y = \tan(kx^2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

- 1) $(4x - y)y' = 2x + y$.
- 2) $xy' = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$.
- 3) $(xy' - y)^2 = y^2 + 4x^2$.

Solution : 1) $(4x - y)y' = 2x + y, \quad (E)$. On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = \frac{2 + \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}}$$

On pose

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$t'x + t = \frac{2+t}{4-t} \Leftrightarrow \frac{t}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{x}, \quad t^2 - 3t + 2 \neq 0, \quad x \neq 0, \quad (E').$$

(E') est une équation différentielle à variables séparées. On sépare les variables

$$\begin{aligned} (E') &\Leftrightarrow \frac{(4-t)dt}{t^2 - 3t + 2} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{4-t}{t^2 - 3t + 2} dt = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow \ln \frac{(t-2)^2}{|t-1|^3} = \ln |x| + c \\ &\Rightarrow \frac{(t-2)^2}{(t-1)^3} = kx, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = tx \Leftrightarrow (y - 2x)^2 = K(y - x)^3, \quad K \in \mathbb{R}^*$.

2) $xy' = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad (E)$. On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right).$$

On pose

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$t'x + t = t + \cos^2(t) \Leftrightarrow t'x = \cos^2(t), \quad (E').$$

(E') est une équation différentielle à variables séparées. On sépare les variables

$$\begin{aligned} (E') &\Leftrightarrow \frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow \tan(t) = \ln |x| + c \\ &\Rightarrow t = \arctan(\ln |kx|), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est $y = tx = x \arctan(\ln |kx|), \quad K \in \mathbb{R}^*$.

3) $(xy' - y)^2 = y^2 + 4x^2$, (E) . On a

$$(E) \Leftrightarrow \left(y' - \frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4, \quad x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4}, \\ y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4}. \end{cases}.$$

On pose

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = t'x + t.$$

On reporte y et y' dans (E) , on obtient

$$\begin{cases} t' = \sqrt{t^2 + 4}, \\ t' = -\sqrt{t^2 + 4}. \end{cases} \quad (E')$$

(E') est un système des équations différentielles à variables séparées. On sépare les variables

$$\begin{aligned} (E') &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{dx}{x}, \\ \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = -\frac{dx}{x}. \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \int \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = -\int \frac{dx}{x}. \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{argsh}\left(\frac{t}{2}\right) = \ln|kx|, \\ \operatorname{argsh}\left(\frac{t}{2}\right) = -\ln|kx|. \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = 2sh(\ln|kx|), \\ t = 2sh\left(\ln\left(\frac{1}{|kx|}\right)\right). \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E) est

$$y = tx = 2xsh(\ln|kx|), \quad k \in \mathbb{R},$$

ou

$$y = tx = 2xsh\left(\ln\left(\frac{1}{|kx|}\right)\right), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles de Bernoulli suivantes :

1) $y' - y = 2e^{-x}\sqrt{y}$.

2) $(x^3 + 1)y' - 3x^2y - xy^3 = 0$.

3) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x}$.

Solution : 1) $y' - y = 2e^{-x}\sqrt{y}$, (E) .

On effectue le changement de variable

$$z = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

On a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{2\sqrt{y}} = e^{-x}.$$

D'où

$$z' - \frac{1}{2}z = e^{-x}, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$z' - \frac{1}{2}z = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2}dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \int dx \\ &\Rightarrow \ln |z| = \frac{1}{2}x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z = ke^{\frac{1}{2}x}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On utilise la méthode de variation de la constante

$$z(x) = k(x)e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow z'(x) = k'(x)e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}k(x)e^{\frac{1}{2}x}.$$

On reporte dans (E^*) , on obtient

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{-\frac{3}{2}x} \Rightarrow \int k'(x) dx = \int e^{-\frac{3}{2}x} dx \\ &\Rightarrow k(x) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z = -\frac{2}{3}e^{-x} - \frac{2\lambda}{3}e^{-\frac{3}{2}x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par suite, la solution générale de (E) est

$$y = z^2 = \left(-\frac{2}{3}e^{-x} - \frac{2\lambda}{3}e^{-\frac{3}{2}x} \right)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) $(x^3 + 1)y' - 3x^2y - xy^3 = 0$, (E) . On a

$$(E) \Leftrightarrow y' - \frac{3x^2}{1+x^3}y = -\frac{x}{1+x^3}y^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} - \frac{3x^2}{1+x^3} \frac{y}{y^3} = -\frac{x}{1+x^3}.$$

On effectue le changement de variable

$$z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3}.$$

On a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}z' - \frac{3x^2}{1+x^3}z = -\frac{x}{1+x^3} \\ &\Leftrightarrow z' + 2\frac{3x^2}{1+x^3}z = \frac{2x}{1+x^3}, \quad (E^*). \end{aligned}$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$z' + 2\frac{3x^2}{1+x^3}z = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= -2\frac{3x^2}{1+x^3}dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{3x^2}{1+x^3}dx \\ &\Rightarrow \ln|z| = -2 \ln|1+x^3| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z = \frac{c}{(1+x^3)^2}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On utilise la méthode de variation de la constante

$$z(x) = \frac{c(x)}{(1+x^3)^2} \Rightarrow z'(x) = \frac{c'(x)(1+x^3)^2 - 2(1+x^3)(3x^2)c(x)}{(1+x^3)^4}.$$

On reporte dans (E^*) , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{c'(x)(1+x^3)^2}{(1+x^3)^4} &= \frac{-2x}{1+x^3} \Rightarrow c'(x) = -2x(1+x^3) \\ &\Rightarrow c(x) = \int -2x(1+x^3)dx \\ &\Rightarrow c(x) = -x^2 - \frac{2}{5}x^5 + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z = \frac{-x^2 - \frac{2}{5}x^5 + k}{(1+x^3)^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite, la solution générale de (E) est

$$y^2 = \frac{1}{z} = \frac{(1+x^3)^2}{-x^2 - \frac{2}{5}x^5 + k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x}, \quad (E).$

On effectue le changement de variable

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

On a

$$(E) \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$z' + \frac{1}{x}z = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = - \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \ln |z| = -\ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On utilise la méthode de variation de la constante

$$z(x) = \frac{c(x)}{x} \Rightarrow z'(x) = \frac{xc'(x) - c(x)}{x^2}.$$

On reporte dans (E^*) , on obtient

$$c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$z = \frac{x + k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite, la solution générale de (E) est

$$y = \frac{1}{z} = \frac{x}{x + k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles de Reccati suivantes :

- 1) $(x^3 - 1)y' - y^2 - xy + 2x, \quad y_p = x^2.$
- 2) $x^2y' - xy - x^2y^2 = 1, \quad y_p = \frac{1}{x}.$
- 3) $xy' - (2x + 1)y + y^2 = x^2, \quad y_p = x.$
- 4) $2y' + y^2 - \frac{3}{x^2} = 0, \quad y_p = -\frac{1}{x}.$

Solution : 1) $(x^3 - 1)y' - y^2 - xy + 2x, \quad (E)$. On pose

$$z + x^2 = y \Rightarrow y' = z' + 2x.$$

On reporte dans (E) , on obtient

$$z' + 2x = \frac{1}{x^3 - 1}z^2 + \left(\frac{2x^2}{x^3 - 1} + \frac{x^2}{x^3 - 1} \right)z,$$

ou encore

$$z' - \frac{1}{x^3 - 1}z = \frac{1}{x^3 - 1}z^2, \quad (E_b),$$

(E_b) est une équation différentielle de Bernoulli. On effectue le changement de variable

$$t = z^{1-2} = \frac{1}{z} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}.$$

On a

$$(E_b) \Leftrightarrow t' + \frac{3x^2}{x^3 - 1}t = -\frac{1}{x^3 - 1}, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$t' + \frac{3x^2}{x^3 - 1}t = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} &= -\frac{3x^2}{x^3 - 1}dx \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{3x^2}{x^3 - 1}dx \\ &\Rightarrow \ln |t| = -\ln |x^3 - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow t = \frac{k}{x^3 - 1}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E^*) , on utilise la méthode de la variation des constantes, on obtient

$$k(x) = -x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$t = \frac{-x + \lambda}{x^3 - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de (E) (on remplace z par $\frac{1}{t}$) est

$$y = z + x^2 = \frac{x^3 - 1}{x + \lambda} + x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) $x^2y' - xy - x^2y^2 = 1, \quad (E) \quad y_p = \frac{1}{x}.$

On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = -y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}. \quad (E').$$

On pose

$$z + \frac{1}{x} = y \Rightarrow y' = z' - \frac{1}{x^2}.$$

On reporte dans (E') , on obtient

$$z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} \left(z + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2},$$

ou encore

$$z' - \frac{3}{x}z = -z^2, \quad (E_b),$$

(E_b) est une équation différentielle de Bernoulli. On effectue le changement de variable

$$t = z^{1-2} = \frac{1}{z} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}.$$

On a

$$(E_b) \Leftrightarrow -t' + \frac{3}{x}t = -1, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$-t' + \frac{3}{x}t = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} &= \frac{3}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = 3 \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \ln |t| = 3 \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow t = kx^3, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E^*) , on utilise la méthode de la variation des constantes, on obtient

$$k(x) = -\frac{1}{x^2} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$t = \left(-\frac{1}{x^2} + \lambda\right)x^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de (E) (on remplace z par $\frac{1}{t}$) est

$$y = z + \frac{1}{x} = \frac{1}{-x + \lambda x^3} + \frac{1}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3) \quad xy' - (2x + 1)y + y^2 = x^2, \quad (E), \quad y_p = x.$$

On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}y^2 + \frac{2x+1}{x}y - x, \quad (E').$$

On pose

$$z + x = y \Rightarrow y' = z' + 1.$$

On reporte dans (E') , on obtient

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}z^2, \quad (E_b),$$

(E_b) est une équation différentielle de Bernoulli. On effectue le changement de variable

$$t = z^{1-2} = \frac{1}{z} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}.$$

On a

$$(E_b) \Leftrightarrow -t' - \frac{1}{x}t = -\frac{1}{x}, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$t' + \frac{1}{x}t = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} &= -\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \ln |t| = -\ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow t = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E^*) , on utilise la méthode de la variation des constantes, on obtient

$$k(x) = -\frac{1}{x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$t = \frac{-\frac{1}{x} + \lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de (E) (on remplace z par $\frac{1}{t}$) est

$$y = z + x = \frac{-x^2}{-1 + \lambda x} + x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4) $2y' + y^2 - \frac{3}{x^2} = 0, \quad (E), \quad y_p = -\frac{1}{x}.$

On a

$$(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{x^2}, \quad (E').$$

On pose

$$z - \frac{1}{x} = y \Rightarrow y' = z' + \frac{1}{x^2}.$$

On reporte dans (E') , on obtient

$$z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}z^2, \quad (E_b),$$

(E_b) est une équation différentielle de Bernoulli. On effectue le changement de variable

$$t = z^{1-2} = \frac{1}{z} \Rightarrow t' = -\frac{z'}{z^2}.$$

On a

$$(E_b) \Leftrightarrow -t' + \frac{1}{x}t = -\frac{1}{2}, \quad (E^*).$$

(E^*) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et l'équation sans seconde membre associée à (E^*) est

$$-t' + \frac{1}{x}t = 0, \quad (E_0^*).$$

On sépare les variables

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t} = \frac{1}{x}dx &\Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \ln |t| = \ln |x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow t = kx, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E^*) , on utilise la méthode de la variation des constantes, on obtient

$$k(x) = \frac{1}{2}x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$t = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de (E) (on remplace z par $\frac{1}{t}$) est

$$y = z - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 + 2\lambda x} - \frac{1}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Equation différentielle lineaires d'ordre 2 a coefficients constants :

2.2.3.1 Forme de l'équation :

Ce sont des équations différentielles du type : $y'' + ay' + by = f(x)$, où a et b sont des réels et f est une fonction définie et continue dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

2.2.3.2 Résolution de l'équation sans second membre

On sait que l'espace des solutions de l'équation sans second membre $y'' + ay' + by = 0$, (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2. On cherche une base de l'espace. On cherche des solutions de la forme

$$y = e^{\lambda x}.$$

En reportant dans $y'' + ay' + by = 0$, on voit que y est solution si et seulement si λ vérifie :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (E^*).$$

On dit que λ est une racine de l'équation caractéristique (E^*) . On distingue trois cas :

Premier cas : Si (E^*) admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donnée par les fonctions $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$. Donc, toute solution de l'équation différentielle (E_0) s'écrit sous la forme (dite les solutions maximales de (E_0)) :

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Deuxième cas : Si (E^*) admet une racine double λ alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donnée par les fonctions $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$. Donc, toute solution de l'équation différentielle (E_0) s'écrit sous la forme

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Troisième cas : Si (E^*) admet deux racines complexes conjugués deux à deux $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ou $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donnée par les fonctions $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}$. Donc, toute solution de l'équation différentielle (E_0) s'écrit sous la forme (dite les solutions maximales de (E_0)) :

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.2.3.3 Résolution de l'équation avec second membre

(i) Soit y_0 est une solution de (E) . Pour une fonction y est une solution de (E) il faut et il suffit qu'il existe une fonction y_1 solution de l'équation différentielle homogène telle que $y = y_0 + y_1$.

Si on a trouvé une solution particulière y_0 de (E) , on obtient directement la solution générale de (E) en ajoutant à y_0 , la solution générale de l'équation différentielle homogène.

(ii) **Méthode de variation de la constante :** On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' + ay' + by' = f(x)$ (E) de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où c_1 et c_2 sont des fonctions dérivables, inconnues vérifiant la condition supplémentaire

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \quad (E_1)$$

On reporte y , y' et y'' on (E) , on obtient

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x), \quad (E_2)$$

on est ramené ainsi à déterminer les fonctions c_1 et c_2 satisfaisant au système des deux équations (E_1) et (E_2) .

Remarque 10. Rappel :

1) On cherche à résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre « exponentielle-polynôme » de la forme $y'' + ay' + by' = p(x) e^{dx}$ où p est un polynôme non nul. Alors la solution générale de cette équation différentielle est la

somme de la solution générale de l'équation homogène (E_0) et d'une solution particulière. En pratique, une solution particulière se cherche sous la forme $x \mapsto q(x)e^{dx}$ où q est un polynôme. Le degré de q doit être choisi de la manière suivante :

(i) si d n'est pas racine de $\lambda^2 + a\lambda + b$ alors, $\deg(q) = \deg(p)$.

(ii) si d est racine simple de $\lambda^2 + a\lambda + b$ alors, $\deg(q) = \deg(p) + 1$.

(iii) si d est racine double de $\lambda^2 + a\lambda + b$ alors, $\deg(q) = \deg(p) + 2$.

2) Cas où le second membre de l'équation différentielle à coefficients constants est un polynôme de la forme $y'' + ay' + by' = p_n(x)$, où p est un polynôme non nul de degré n . Alors la solution générale de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène (E_0) et d'une solution particulière. En pratique, une solution particulière se cherche sous la forme suivante :

(i) Si $b \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré $n + 1$.

(ii) Si $b = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré n .

(iii) Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation se réduit à $y'' = p_n(x)$ et l'on intègre deux fois successivement.

Exemple 47. On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = \cos^2(x), \quad (E).$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - y = 0, \quad (E_0).$$

son polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Donc les solutions générales de l'équation homogène (E_0) sont de la forme

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Reste à trouver une solution particulière de (E). On linéarise le second membre

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Par le principe de superposition, il suffit donc de trouver des solutions particulières des deux équations différentielles

$$y'' - y = \frac{1}{2} \cos(2x)$$

et

$$y'' - y = \frac{1}{2}.$$

Puis de les sommer, pour récupérer une solution particulière de (E). Pour la première $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc on cherche les solutions sous la forme

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En injectant, on trouve

$$-4c_1 \cos(2x) - 4c_2 \sin(2x) - c_1 \cos(2x) - c_2 \sin(2x) = \frac{1}{2} \cos(2x).$$

D'où $c_1 = -\frac{1}{10}$ et $c_2 = 0$.

Par suite, une solution particulière de la première équation est donc

$$y_0 = \frac{1}{10} \cos(2x).$$

Pour la seconde équation, le second membre est un polynôme constant, on cherche une solution constante, on voit que $y_1 = -\frac{1}{2}$ convient.

Finalement, une solution particulière de (E) est

$$y_1 + y_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos(2x).$$

Donc, les solutions de (E) sont de la forme

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos(2x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 48. On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y + y = e^x + e^{-x}, \quad (E).$$

On va successivement chercher une solution particulière de

$$y'' - 2y + y = e^x,$$

et

$$y'' - 2y + y = e^{-x}.$$

a) Solution de $y'' - 2y + y = e^{-x}$:

Comme -1 n'est pas racine de $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Alors, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y = Ae^{-x}$. Il vient

$$y'' - 2y + y = e^{-x} \Rightarrow 4Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

b) Solution de $y'' - 2y + y = e^x$:

Comme 1 est racine double de $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Alors, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y = Ax^2 e^x$. Il vient

$$y'' - 2y + y = e^x \Rightarrow 2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Donc les solutions générales de l'équation homogène (E) est

$$y = (c_1 x + c_2) e^x + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{4} e^{-x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.2.4 Exercices corrigés

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
- 2) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
- 3) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
- 4) $y'' + 4y' + 13y = 0$.
- 5) $y'' + 3y = 2$.

Solution : 1) L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 1 > 0$, d'où $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

La solution générale est

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 0$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

La solution générale est

$$y = (c_1 x + c_2) e^{-2x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -36 < 0$, d'où $\lambda_1 = -2 + 3i$ et $\lambda_2 = -2 - 3i$.

La solution générale est

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5) $y'' + 3y = 2$, (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 3 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -12 < 0$, d'où $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$.

La solution générale est

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ &= e^{0x} \left(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) \right) \\ &= c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de (E) : On voit que $y_p = \frac{2}{3}$ est une solution de (E) .

Donc, La solution générale de (E) est

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) + \frac{2}{3} \\ &= c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) + \frac{2}{3}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.
- 2) $y'' + 2y + y = 4xe^x$.
- 3) $y'' + y = \cos(x)$.
- 4) $y'' - 3y' + 2y = 3(x^2 + 1)$.
- 5) $y'' + y = x^2 - 2x$.
- 6) $y'' = 5x^4 + 2x^2 + x + 1$.

Solution : 1) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$ (E). L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 1 > 0$, d'où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = 4x^2$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = e^x, \text{ et } y_2 = e^{2x},$$

et c_1 et c_2 sont des fonctions inconnues, dérivables qui vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0, \\ c_1' e^x - 2c_2' e^{2x} = 4x^2, \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 2 et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c_1' = \frac{4}{3} x^2 e^{-x} \Rightarrow c_1 = \frac{4}{3} \int x^2 e^{-x} dx,$$

on intègre deux fois par parties, on obtient

$$c_1 = -\frac{1}{3} (4x^2 + 8x + 8) e^{-x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$c_2' = -c_1' e^{3x} = \frac{1}{3} (4x^2 + 8x + 8) e^{3x} \Rightarrow c_2 = \int \frac{1}{3} (4x^2 + 8x + 8) e^{2x} dx,$$

En intégrant par parties deux fois, on trouve

$$c_2 = -\frac{1}{6} (4x^2 - 8) e^{2x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_0 = 2x^2 + 8x - 8.$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} (-4x^2 + 8x - 8), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dixième méthode : Comme le second membre de (E) est un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2,

$$y_0 = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\begin{cases} y'_0 = 2ax + b, \\ y''_0 = 2a. \end{cases}.$$

En reportant y , y' et y'' dans l'équation (E) , on obtient

$$2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a = 4x^2.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = 2. \\ b = 6. \\ c = 7. \end{cases}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) $y'' + 2y' + y = 4xe^x$ (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 0$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = (c_1 x + c_2) e^{-x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = 4xe^x$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = xe^{-x}, \text{ et } y_2 = e^{-x}.$$

On a

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c'_1 x e^{-x} + c'_2 e^{-x} = 0, \\ c'_1 (1-x) e^{-x} - c'_2 e^{-x} = 4xe^x, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} c'_1 x + c'_2 = 0, \\ c'_1 (1-x) - c'_2 = 4xe^{2x}. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c'_1 = 4xe^{2x} \Rightarrow c_1 = \int 4xe^{2x} dx,$$

on intègre par parties, on obtient

$$c_1 = (2x - 1) e^{2x}.$$

Par suite,

$$c'_2 = -xc'_1 = -4x^2 e^{2x} \Rightarrow c_2 = - \int 4x^2 e^{2x} dx,$$

L'intégration par parties donne

$$c_2 = (2x^2 + 2x - 1) e^{2x}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_0 = (2x - 1) x e^{2x} e^{-x} + (2x^2 + 2x - 1) e^{2x} e^{-x} = (x - 1) e^x.$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = (c_1 x + c_2) e^{-x} + (x - 1) e^x, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dexième méthode : Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique (E^*) . On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 (voir remarque 10). On a $y_p = ax + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Il vient

$$\begin{cases} y_p = ax + b, \\ y'_p = 2a, \end{cases}$$

En reportant dans (E) , on obtient

$$4ax + 2b + 2a = 4x.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \end{cases}.$$

Ainsi, $y_p = 2x - 4$.

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = (c_1x + c_2)e^{-x} + (x - 1)e^x, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3) $y'' + y = \cos(x)$ (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -4 < 0$, d'où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = \cos(x)$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = \cos(x), \text{ et } y_2 = \sin(x).$$

On a

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c'_1 \cos(x) + c'_2 \sin(x) = 0, \\ -c'_1 \sin(x) - c'_2 \cos(x) = \cos(x), \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\cos(x)$, la seconde par $-\sin(x)$ et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c'_1 = -\sin(x) \cos(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x) \Rightarrow c_1 = \int -\frac{1}{2} \sin(2x) dx$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \cos(2x) + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

En multipliant la première équation par $\sin(x)$, la seconde par $\cos(x)$ et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c_2' = \cos(x) \cos(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \Rightarrow c_2 = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2}x + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_0 = \frac{1}{4} [\cos(x) \cos(2x) + \sin(x) \sin(2x)] + \frac{1}{2}x \sin(x) = \frac{1}{4} \cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x).$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{4} \cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4) $y'' - 3y' + 2y = 3(x^2 + 1)$. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 1 > 0$, d'où $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Méthode de variation des constantes : On laisse le lecteur de traiter.

Dexième méthode : le second membre de l'équation (E) est un polynôme de degré 2 et la constante b n'est pas nulle. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 (voir remarque 10). On a $y_p = ax^2 + bx + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Il vient

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c, \\ y_p' = 2ax + b, \\ y_p'' = 2a. \end{cases}$$

En reportant dans (E) , on obtient

$$3ax^2 + (8a + 3b)x + 2a + 4b + 3c = 3x^2 + 3.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -\frac{8}{3}, \\ c = \frac{35}{3}. \end{cases}.$$

Ainsi, $y_p = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{35}{3}$.

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{35}{3}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) $y'' + y = x^3 - 4$ (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -4 < 0$, d'où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Méthode de variation des constantes : On laisse le lecteur de traiter.

Dixième méthode : le second membre de l'équation (E) est un polynôme de degré 2 et la constante b est nulle. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3 (voir remarque 10). On a $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Il vient

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d, \\ y'_p = 3ax^2 + 2bx + c, \\ y''_p = 6ax + 2b. \end{cases}$$

En reportant dans (E) , on obtient

$$3ax^2 + 2bx + c + 6a = x^2 - 2x.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -1, \\ c = -2. \end{cases}.$$

Ainsi, $y_p = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + d$.

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + d, \quad (c_1, c_2, d) \in \mathbb{R}^3.$$

6) $y'' = 5x^4 + 2x^2 + x + 1$, (E) .

On intègre successivement deux fois (voir remarque 10), on trouve

$$y' = x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c_1,$$

et donc la solution générale de l'équation (E) est

$$y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 15. Résoudre les équations différentielles linéaire du deuxième ordre suivantes :

- 1) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
- 2) $y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x)e^x$.
- 3) $y'' + y = \cos^2(x)$.
- 4) $y'' + y = \tan(x)$.
- 5) $y'' - 4y' + 3y = (x^2 + 3x + 2)\sin(x) + e^x$.

Solution : 1) $y'' + 4y' + 3y = 0$, (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En appliquant les conditions initiales pour déterminer c_1 et c_2 . On a

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ -3c_1 - c_2 = -1, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Par addition (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$-2c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}.$$

En substituant $c_1 = -\frac{1}{2}$ dans (1), on trouve $c_2 = \frac{5}{2}$.

2) $y'' - 3y' + 2y = 0$, (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Première méthode : Comme 1 est une racine de $\lambda^2 - 3\lambda + 2$. Alors, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y = (ax^2 + bx + c)e^x$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $y_p = ax^2 + bx + c$. Il vient

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c, \\ y'_p = 2ax + b, \\ y''_p = 2a. \end{cases}$$

En reportant dans (E) , on obtient

$$-2ax + 2a - b = 1 - 2x.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = 3. \end{cases}.$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (-x^2 + 3x + c)e^x, \quad (c_1, c_2, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Deuxième méthode : Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = (1 - 2x)e^x$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = e^x, \text{ et } y_2 = e^{2x},$$

et c_1 et c_2 sont des fonctions inconnues, dérivables qui vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0, \\ c_1' e^x - 2c_2' e^{2x} = (1 - 2x)e^x, \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 2 et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{1}{3}(1 - 2x) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \int (1 - 2x) dx, \\ &\Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}(x - x^2) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$c_2' = -c_1' e^{-x} = -\frac{1}{3}(1 - 2x)e^{-x} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} \int (1 - 2x)e^{-x} dx,$$

En intégrant par parties deux fois, pour trouver la solution particulière est donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}(-x^2 + 3x + c), \quad (c, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3.$$

3) $y'' + y = \cos^2(x)$ (E). L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -4 < 0$, d'où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = \cos^2(x)$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = \cos(x), \text{ et } y_2 = \sin(x).$$

On a

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x) = 0, \\ -c_1' \sin(x) + c_2' \cos(x) = \cos^2(x), \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\sin(x)$, la seconde par $\cos(x)$ et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c_1' = \cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \Rightarrow c_1 = \int \left(\frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \right) dx$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{12} \cos(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

La première équation donne

$$c_2' = \frac{c_1' \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^3(x) \sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow c_2 = \int \cos^2(x) \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \int (1 - \sin^2(x)) \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \int \sin(x) dx - \int \sin^3(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = -\cos(x) - \int \sin^3(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = -\cos(x) - \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = -\cos(x) + \int (1 - \cos^2(x)) d(\cos(x))$$

$$\Rightarrow c_2 = -\cos(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) + \cos(x) + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \right) + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_0 = \frac{1}{12} \left[\sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) + k_1 \right] \sin(x) + \left(-\frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{12} \cos(x) + k_2 \right) \cos(x).$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + y_0, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Deuxième méthode : Le second membre $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p = a \cos(2x)$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{2} \cos(2x)$

Comme $2i$ n'est pas racine de $\lambda^2 + 1 = 0$. Alors, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Il vient

$$\begin{cases} y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x), \\ y'_p = 2b \cos(2x) - 2a \sin(2x), \\ y''_p = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x). \end{cases}$$

En reportant dans (E), on obtient

$$-3a \cos(2x) - 3b \sin(2x) = \frac{1}{2} \cos(2x).$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{6}, \\ b = 0. \end{cases}.$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{1}{6} \cos(2x) + \frac{1}{2}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4) $y'' + y = \tan(x)$, (E). L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -4 < 0$, d'où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = \tan(x)$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = \cos(x), \text{ et } y_2 = \sin(x).$$

On a

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c'_1 \cos(x) + c'_2 \sin(x) = 0, \\ -c'_1 \sin(x) + c'_2 \cos(x) = \tan(x), \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\cos(x)$, la seconde par $-\sin(x)$ et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$\begin{aligned} c_1' &= -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \Rightarrow c_1 = -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx \\ &\Rightarrow c_1 = -\int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} dx \\ &\Rightarrow c_1 = -\int \frac{1}{\cos(x)} dx + \int \cos(x) dx \\ &\Rightarrow c_1 = -\int \frac{1}{\cos(x)} dx + \sin(x). \end{aligned}$$

Pour calculer $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$, on pose

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x)} dx &= \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{(1-t)(1+t)} dt \\ &= \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + k \\ &= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + k. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\int \frac{1}{\cos(x)} dx + \sin(x) \\ &= -\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \sin(x) + k \\ &= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \sin(x) + k \\ &= \ln\left|\frac{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + \sin(x) + k. \end{aligned}$$

D'une manière similaire, en multipliant la première équation par $\sin(x)$, la seconde par $\cos(x)$ et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$c_2' = \sin(x) \Rightarrow c_2 = \int \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \cos(x) + k', \quad k' \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ &= \left[\ln \left| \frac{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + \sin(x) \right] \cos(x) + \cos(x) \sin(x) + k. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + y_0, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5) $y'' - 4y' + 3y = (x^2 + 3x + 2) \sin(x) + e^x$. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode de variation des constantes : Comme le second membre est de la forme $f(x) = (x^2 + 3x + 2) \sin(x) + e^x$, alors, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

où

$$y_1 = e^x, \text{ et } y_2 = e^{3x}.$$

On a

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0, \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x). \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} c'_1 e^x + c'_2 e^{3x} = 0, \\ c'_1 e^x + 3c'_2 e^{3x} = (x^2 + 3x + 2) \sin(x) + e^x, \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par -1 et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve

$$-2c'_2 e^{3x} = -(x^2 + 3x + 2) e^{-3x} \sin(x) - e^{-2x} \Rightarrow c_2 = \int (x^2 + 3x + 2) e^{-3x} \sin(x) dx + \int e^{-2x} dx.$$

Pour calculer $\int (x^2 + 3x + 2) e^{-3x} \sin(x) dx$, on intègre par partie deux fois, on trouve

$$\int (x^2 + 3x + 2) e^{-3x} \sin(x) dx =$$

Donc,

$$c_2 =$$

$$= +k.$$

En substituant dans la première équation, on trouve

$$\begin{aligned} c_1' &= -c_2' e^{2x} \Rightarrow c_2 = \int dx \\ &\Rightarrow c_2 = +k', \quad k' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc

$$y_0 =$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + y_0, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Deuxième méthode : Le second membre est

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2) \sin(x) + e^x = g(x) + h(x),$$

où, $g(x) = (x^2 + 3x + 2) \sin(x)$ et $h(x) = e^x$. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p = a \cos(2x)$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{2} \cos(2x)$

Comme $2i$ n'est pas racine de $\lambda^2 + 1 = 0$. Alors, on cherche donc une solution particulière des équations

$$y'' - 4y' + 3y = (x^2 + 3x + 2) \sin(x), \quad (E_1),$$

et

$$y'' - 4y' + 3y = e^x, \quad (E_2).$$

Pour (E_1) , i n'étant pas racine de l'équation caractéristique, on a une solution particulière sous la forme

$$\begin{cases} y_p = (ax^2 + bx + c) \sin(x), \\ y_p' = (ax^2 + bx + c) \cos(2x) + (2ax + b) \sin(x), \\ y_p'' = 2(2ax + b) \cos(x) + (-ax^2 + (2a - b)x - c) \sin(x). \end{cases}$$

En reportant dans (E_1) , on obtient

$$(ax^2 + (2a + b)x + 2b + c) \cos(x) + (2ax^2 + (-6a + 2b)x - 4b + 2c) \sin(x) = (x^2 + 3x + 2) \sin(x).$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 3 \\ -4b + 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 3, \\ c = 7. \end{cases}.$$

Donc, la solution particulière de (E_1) est

$$y_p = (x^2 + 3x + 2) \sin(x).$$

Pour (E_2) , 1 est une racine de l'équation caractéristique, on a une solution particulière sous la forme

$$\begin{cases} y_p = axe^x, \\ y'_p = ae^x + axe^x, \\ y''_p = 2ae^x + axe^x. \end{cases}$$

Ou bien on pose $y_p = ze^x$. En reportant dans (E_2) , on obtient

$$e^x (z'' - 4z' + 3z) = e^x \Rightarrow z'' - 4z' + 3z = 1, \quad (E^*).$$

La solution générale de l'équation (E^*) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \lambda, \quad (c_1, c_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + (x^2 + 3x + 2) \sin(x). \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4) $y'' + y = \tan(x)$, (E) . L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad (E^*).$$

On a $\Delta = -4 < 0$, d'où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Index

- Critère de convergence, 15
 - comparaison, 15.
 - Alembert, 20.
 - Cauchy, 22.
 - Abel, 27.
- Cauchy (théorème), 31.
- Equation différentielle ordinaire, 50.
 - sans second membre, 51.
 - avec second membre, 52.
 - à variables séparées, 53.
 - exacte, 55.
 - homogènes, 56.
 - Bernoulli, 58.
 - Riccati, 58.
- Equation différentielle du second ordre, 75.
 - avec second membre "exponentielle-polynôme", 76.
- Leibniz (théorème), 27.
- Méthode de variation de la constante, 52, 76.
- Produit des séries, 31.
- Racine, 76.
 - réelles distinctes, 76.
 - double, 76.
 - complexes conjugués deux à deux, 76.
- Séries, 9.
 - Converge, 9.
 - diverge, 9.
 - alternée, 27.
 - géométrique, 9.
 - Riemann, 10.
 - absolument convergente, 29.
 - semi-convergente, 30.
 - Bertrand, 48.

Bibliographie

- [1] K. Allab, Eléments d'analyse, Fonctions d'une variable réelle, Entreprise Nationale du Livre. Alger. 1990.
- [2] A. Benyad et M. Benhassaine, Mathématique, Exercices résolus, O. P. U. Cinquième Edition, 2014.
- [3] C. Baba-Hamed et K. Benhabib, Rappels de cours et exercices avec solutions, O. P. U. Alger 1998.
- [4] A. Doneddu, Topologie, Fonctions réelles d'une variable réelle, Tome 4, Deuxième Edition, Librairie Vuibert, 1979.
- [5] B. P. Démidovitch, Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, Edition Naouka (en Russe), 1990.
- [6] H. Osmanov, Mathématiques : Les séries, Rappels de cours, Exercices corrigés, 2^{ème} Edition, O. P. U. Alger 2015.
- [7] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome II. Préimpression 1991.
- [8] J. Rivaud, Analyse, Séries-Equations différentielles, Vuibert, Paris 1981.